Baby Orbital Mechanics

基礎軌道力學

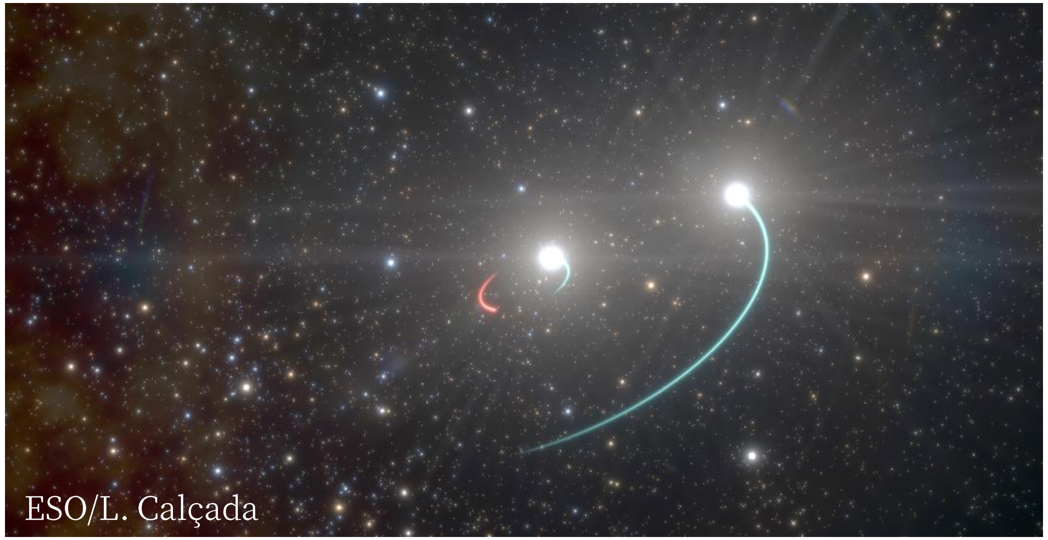
2022.11.29｜NTHU AstroRead｜林彥興

為什麼要了解軌道力學？

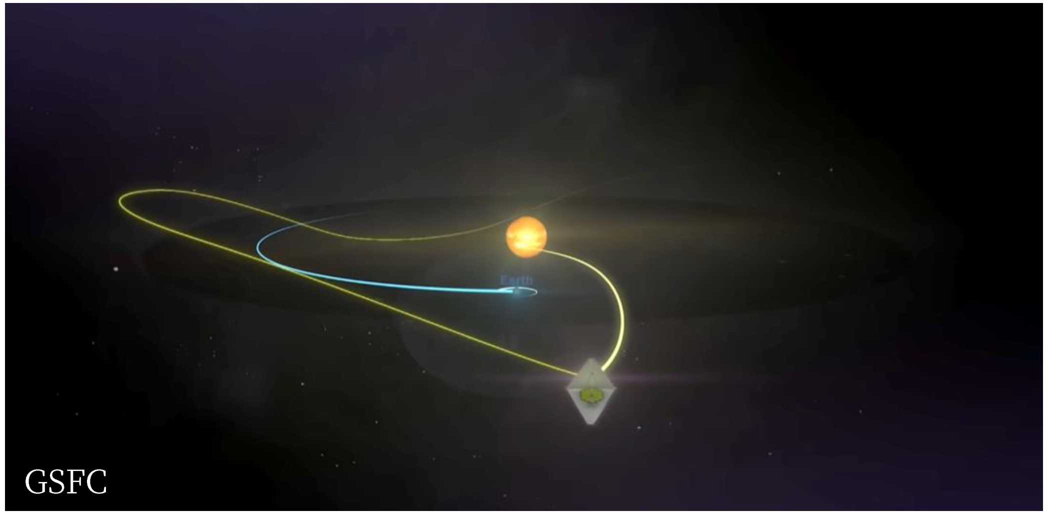
- 重力是宇宙中最普遍、影響最廣的力。
  軌道力學/天體力學是精確描述天體在重力影響下如何運動的知識體系。

- 軌道力學被廣泛用於雙星、系外行星、太陽系小天體、行星防禦等研究領域。

- 軌道力學被廣泛應用於
  各式衛星與探測器的軌道設計。



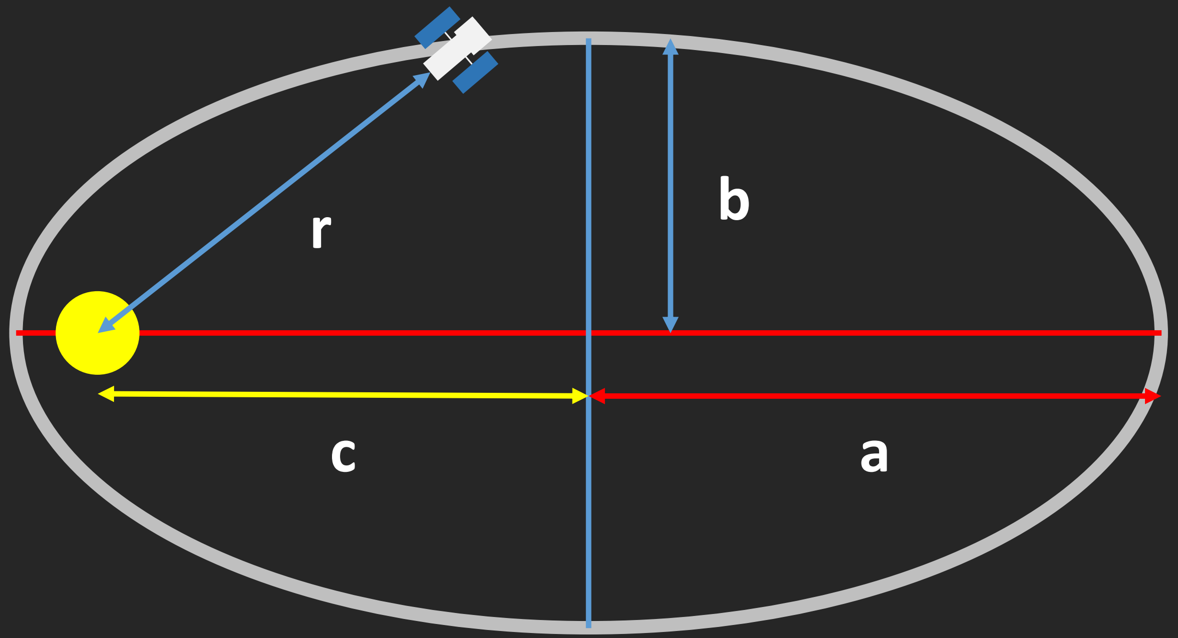
ESO/L. Calçada



GSFC

克卜勒定律 Kepler's Law of planetary motion

- K1：軌道呈圓錐曲線
- K2：單位時間內天體與焦點連線掃過的面積相同
- K3：軌道週期平方與半長軸三次方呈正比



$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$$

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

基本原理

在外太空運行的衛星，只受到重力的作用。重力為保守力，所以力學能守恆：

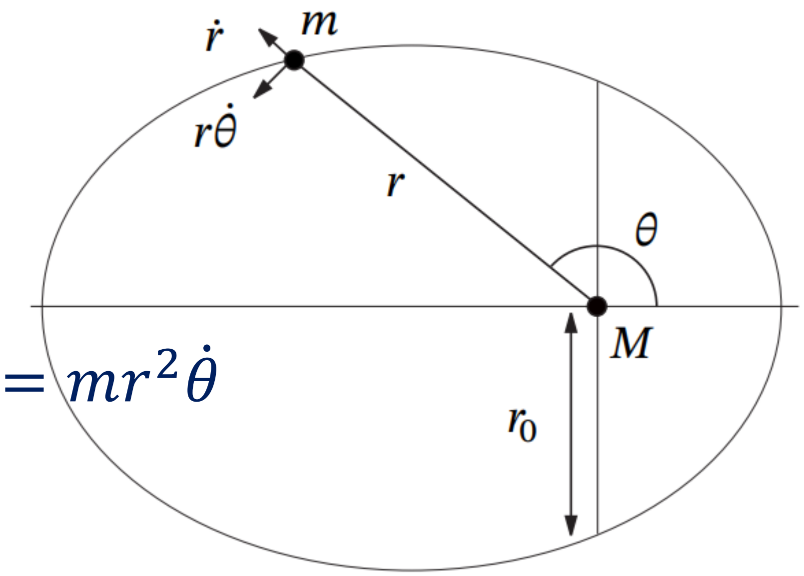
$$E = E_{k_1} + U_1 = E_{k_2} + U_2$$

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2, U = -\frac{GMm}{r}$$

重力恆為連心力，不會造成額外的力矩，故角動量守恆：

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r_1} \times \boldsymbol{p_1} = \boldsymbol{r_2} \times \boldsymbol{p_2}$$

以牛頓力學推導克卜勒定律



在極座標下，總力學能與角動量可以表示為

$$E = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{GMm}{r}, L = mr^2\dot{\theta}$$

變數變換令 $\rho = 1/r$，得 $\dot{\theta} = L\rho^2/m$。對其積分得

$$\theta = \int \dot{\theta} dt = \int \frac{L\rho^2}{m}\frac{dt}{d\rho}d\rho = -\int \frac{L}{m\dot{r}}d\rho, \dot{r} = -\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt}$$

此時，重新整理總能量方程後可得

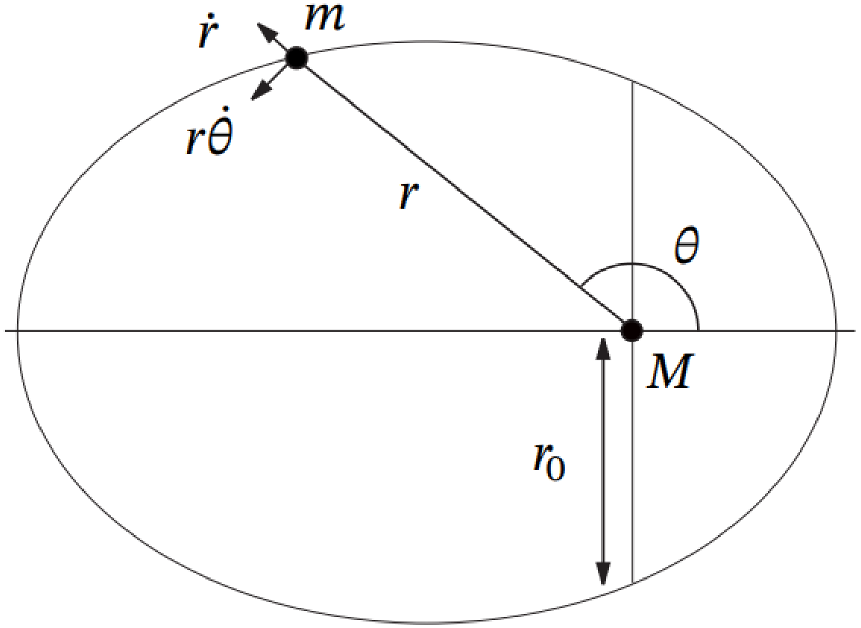
$$\dot{r} = \frac{2E}{m} + 2GM\rho - \frac{L^2}{m^2}\rho^2 = \frac{L}{m}\left[\frac{e^2}{r_0^2} - \left(\rho - \frac{1}{r_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}, r_0 = \frac{L^2}{GMm^2}, e^2 = 1 + \frac{2Er_0}{GMm}$$

Credit: Prof. Graham Woan, Dynamical Astronomy

以牛頓力學推導克卜勒定律

因此將 $\dot{r}$ 代入積分後

$$\theta = -\int \frac{L}{m\dot{r}} d\rho = -\int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{e}{r_0}\right)^2 - \left(\rho - \frac{1}{r_0}\right)^2}} = \cos^{-1}\left(\frac{\rho r_0 - 1}{e}\right)$$



重新整理後發現，這就是圓錐曲線的極座標形式

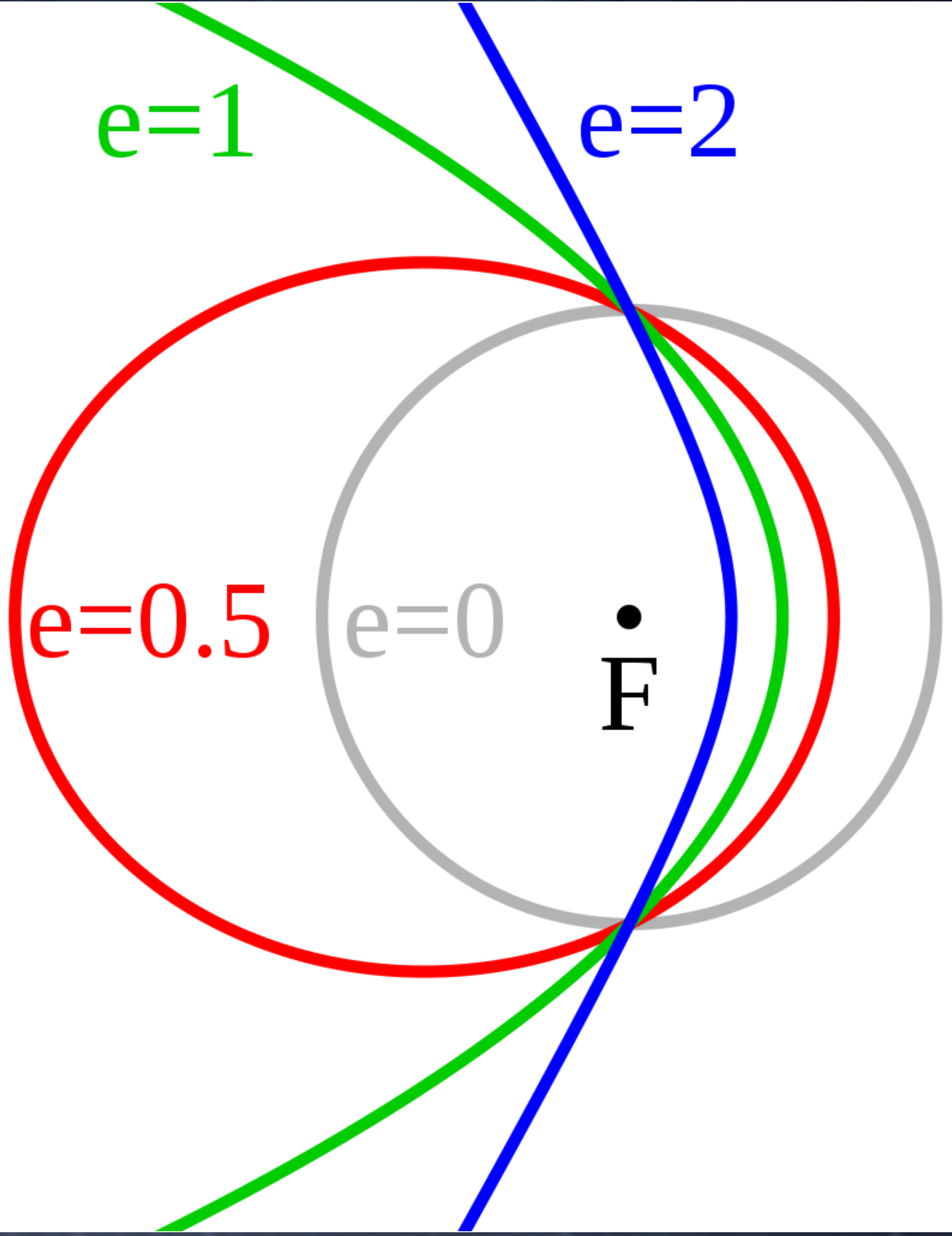
$$\cos\theta = \frac{\rho r_0 - 1}{e}$$

$$r = \frac{r_0}{1 + e\cos\theta}$$

其中 e 為軌道的離心率，它的數值決定了軌道的形式：

- $e = 0$ => 圓形軌道
- $0 < e < 1$ => 橢圓軌道
- $e = 1$ => 拋物線軌道
- $e > 1$ => 雙曲線軌道

而 e 的數值，決定於衛星在某一點所具備的速度方向與大小。如果速度低於逃逸速度，則 $e < 1$；如果高於逃逸速度，則 $e > 1$。

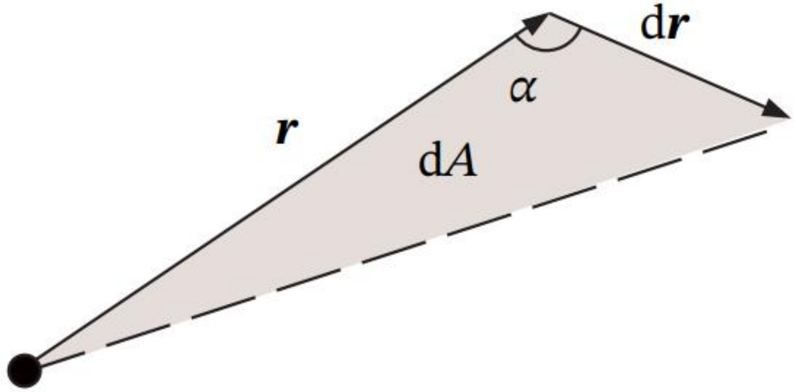


Credit: ScottAlanHill

以牛頓力學推導克卜勒定律

K2 更簡單：

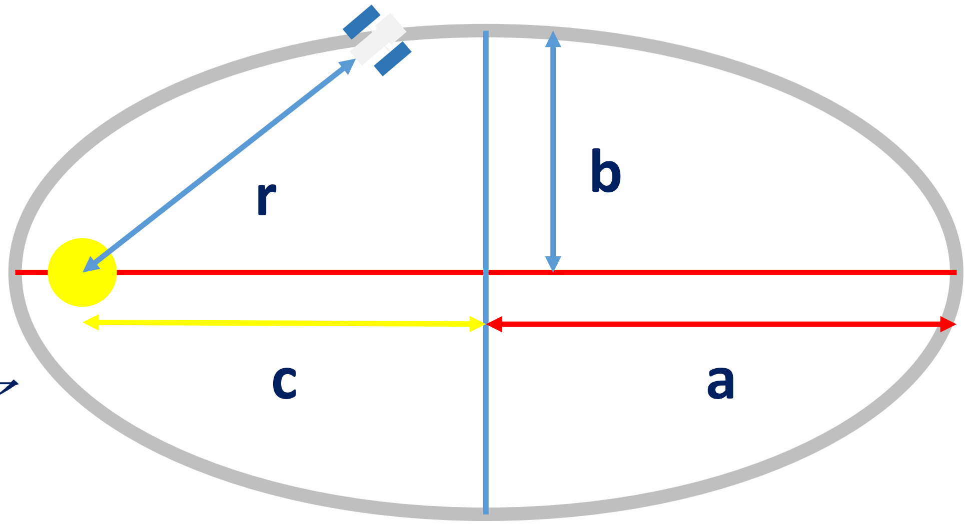
$$dA = \frac{1}{2}|\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}} dt| \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}|\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}| = \frac{L}{2m}$$



而 K3 則需要知道橢圓的面積是 πab

$$T = \frac{A}{\dot{A}} = \frac{\pi ab}{L/2m} = \frac{m}{L} 2\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}$$

$$T^2 = \frac{m^2}{L^2} 4\pi^2 a^4 (1 - e^2)$$

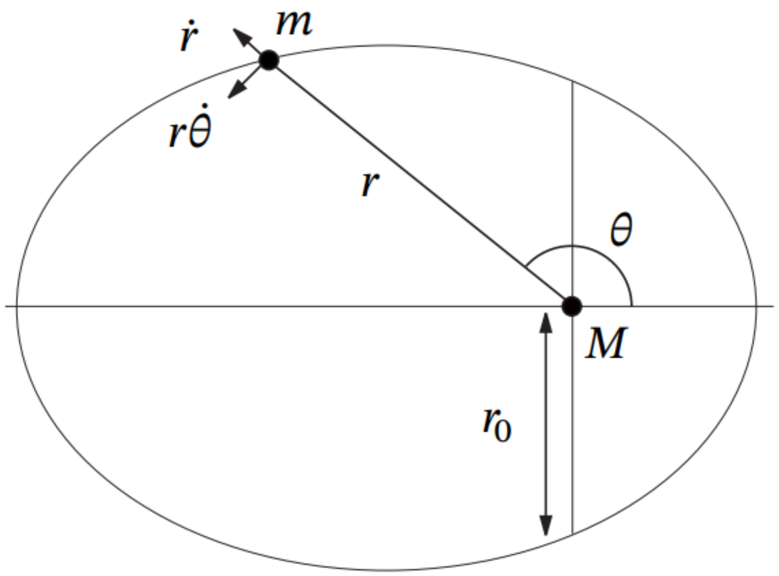


此時，我們只要把 $a(1 - e^2)$ 替換掉，因次就會對了

哪個常數的因次是長度單位呢？

Credit: Prof. Graham Woan, Dynamical Astronomy

以牛頓力學推導克卜勒定律



顯然，最直覺的選項就是 r_0。回想一下橢圓方程：

$$r = \frac{r_0}{1 + e\cos\theta}$$

已知半長軸 $a = \frac{r(\theta=0)+r(\theta=\pi)}{2} \Rightarrow a = r_0(1-e^2)^{-1}$。

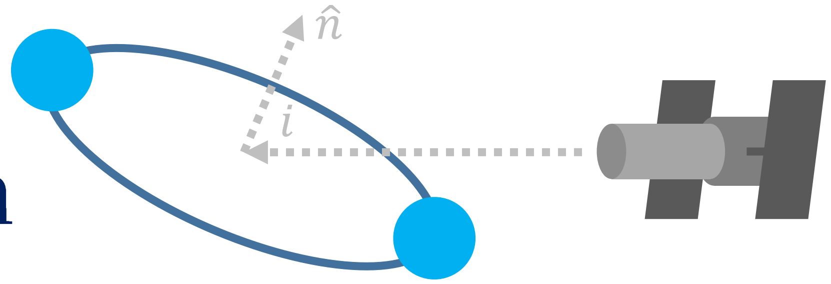
代入剛剛得到的

$$T^2 = \frac{m^2}{L^2}4\pi^2 a^4(1-e^2) = \frac{m^2}{L^2}4\pi^2 a^3 r_0 = \frac{m^2}{L^2}4\pi^2 a^3 \frac{L^2}{GMm^2}$$

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

K3 於是證明完畢。

雙星質量函數 Binary Mass function



前述推導假設了衛星的質量遠小於行星，但克卜勒三定律同樣適用於雙星系統。

在圓形軌道下，雙星質量函數是：

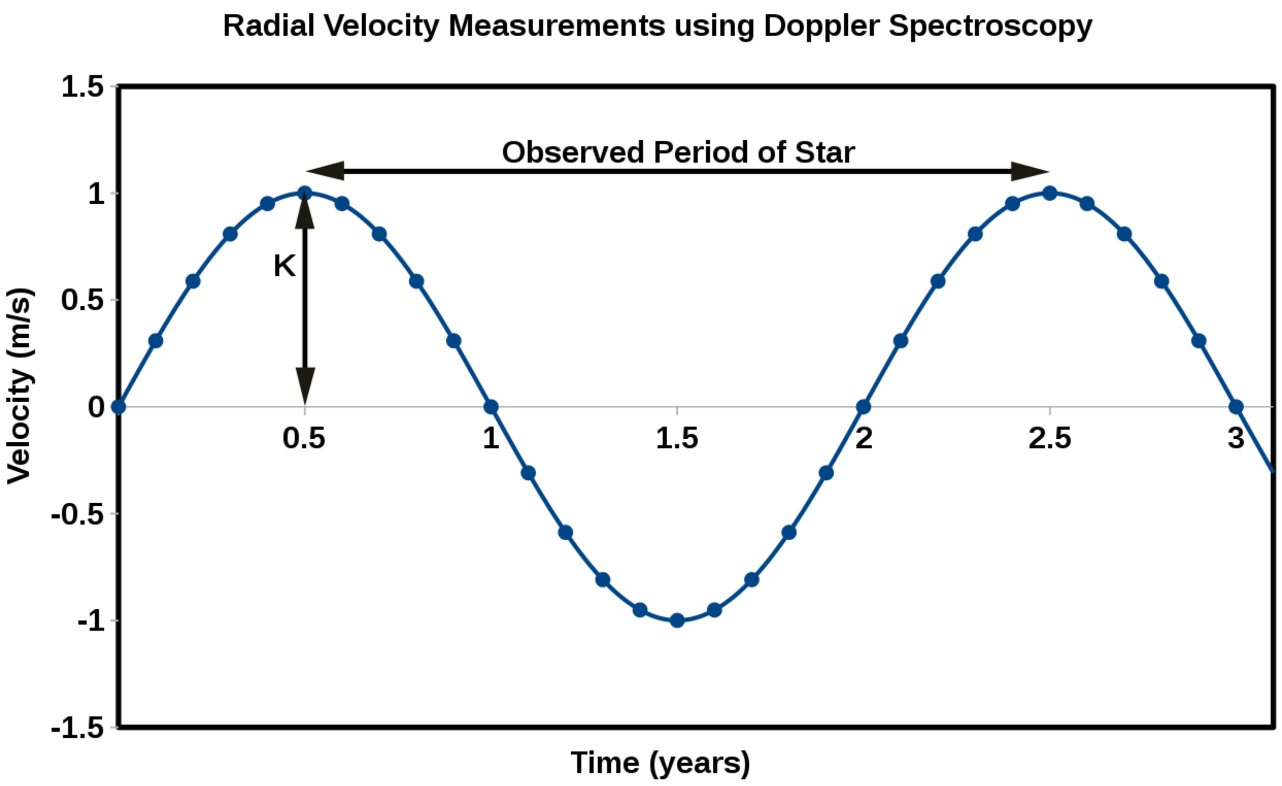
$$f = \frac{M_2^3 \sin^3 i}{(M_1 + M_2)^2} = \frac{P_{\mathrm{orb}} K_1^3}{2\pi G},$$

$K_1 = v_1 \sin i$ (obs)

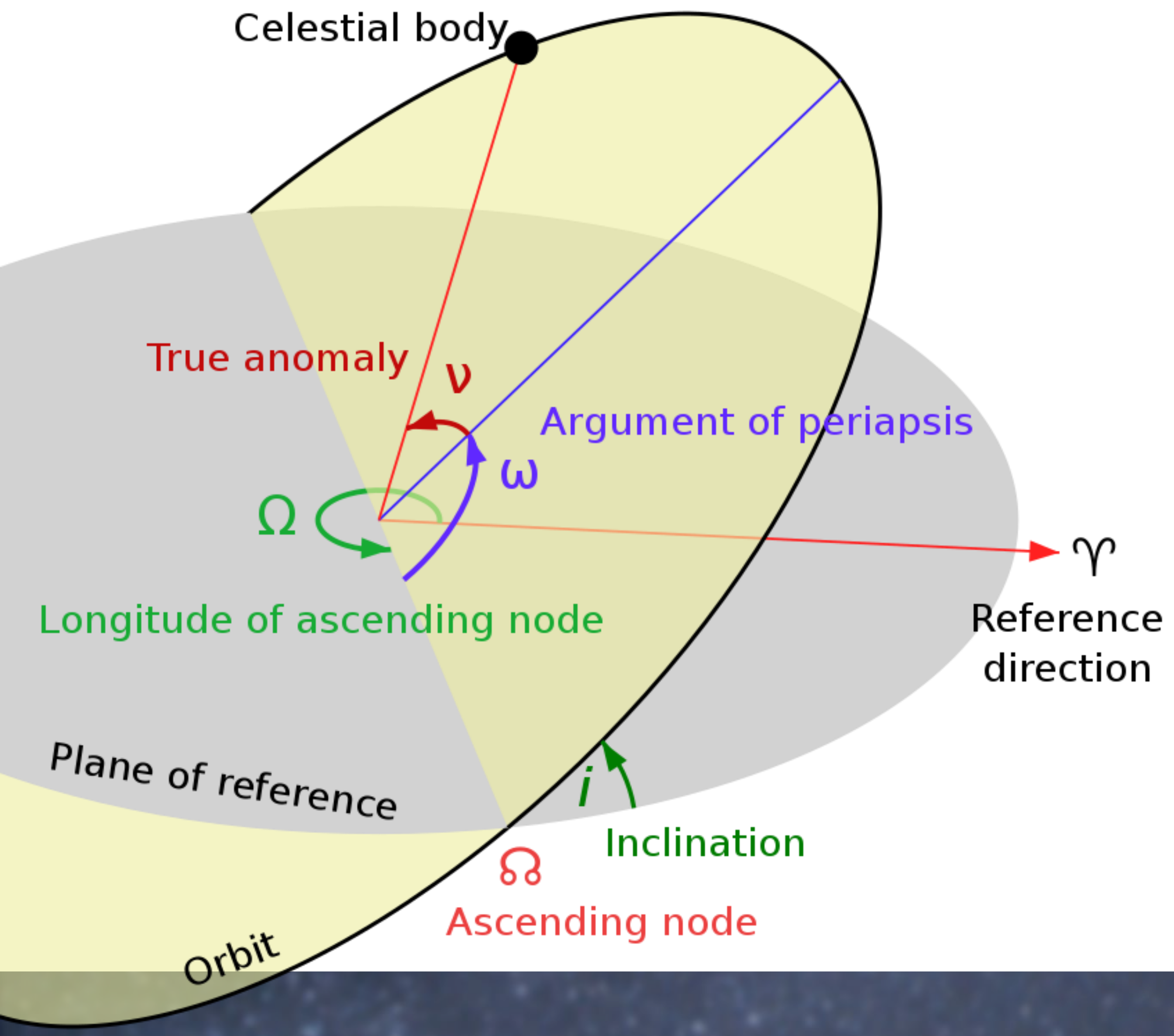
質量函數是極少數

能夠相當直接測量天體質量的方法

因此對恆星演化、系外行星都很重要

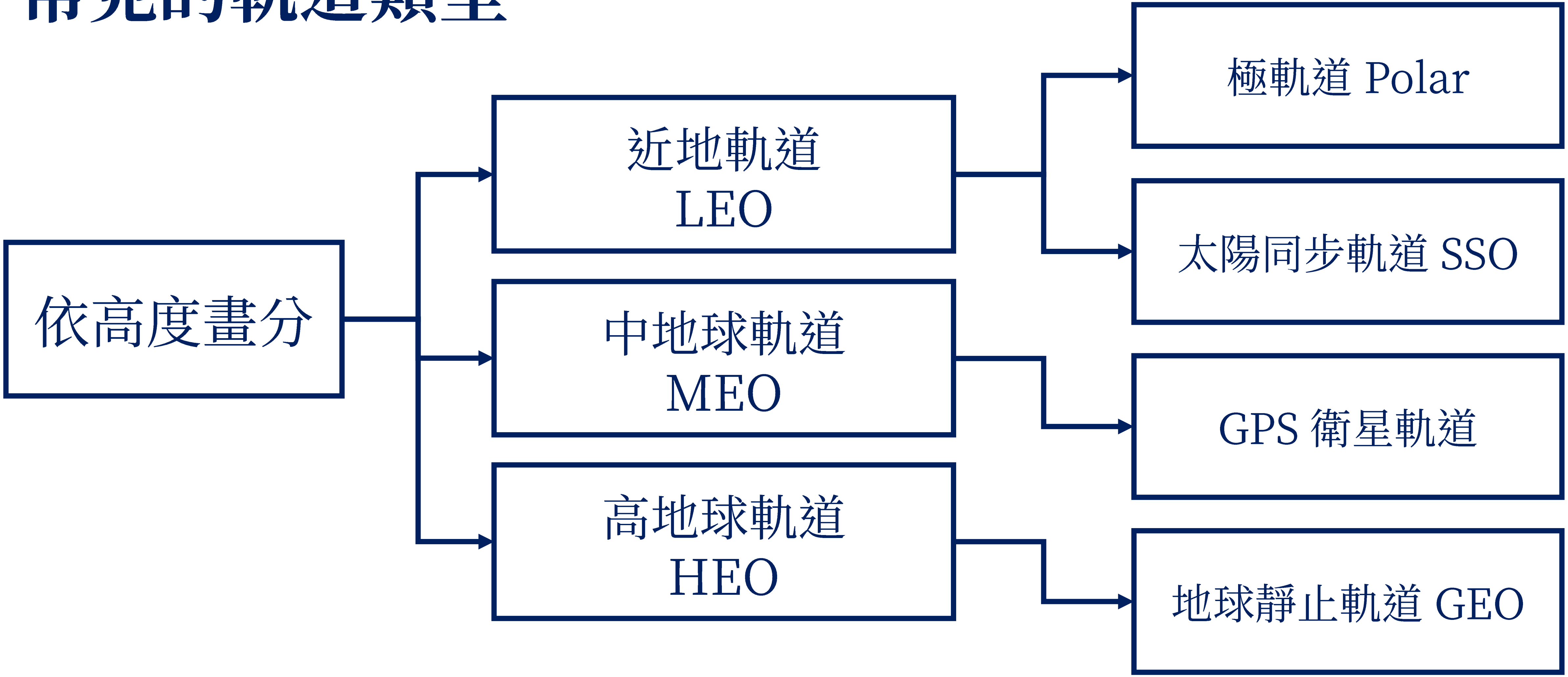


軌道根數 Orbital Elements



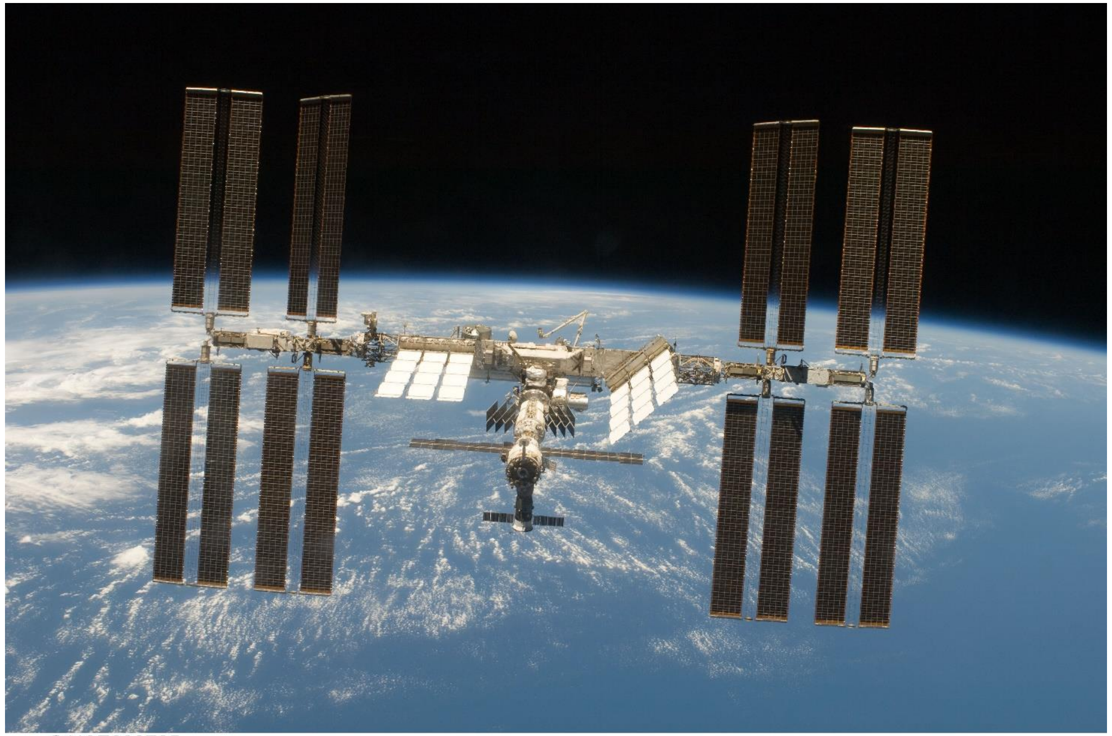
- 上述推導都在二維平面上進行
  但衛星畢竟是運行在三維空間中
- 描述三維空間中的運動需要六個參數
  - 半長軸 Semimajor axis (a)
  - 離心率 Eccentricity (e)
  - 軌道傾角 Inclination (i)
  - 升交點經度
    Longitude of the ascending node (Ω)
  - 近心點幅角 Argument of periapsis (ω)
  - 真近點角 True anomaly (ν)

常見的軌道類型

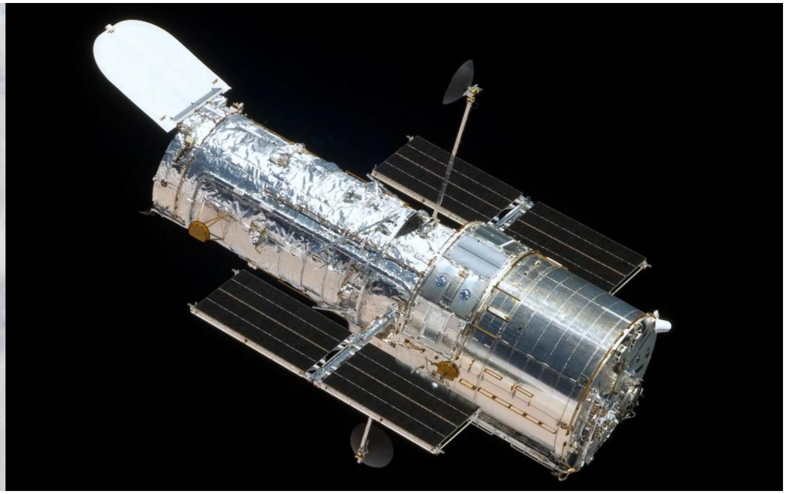

依高度畫分
近地軌道
LEO
中地球軌道
MEO
高地球軌道
HEO
極軌道 Polar
太陽同步軌道 SSO
GPS 衛星軌道
地球靜止軌道 GEO

近地軌道 LEO

- Low Earth Orbit
- 泛指高度 2000 公里以下的圓形軌道
- 大部分的科學衛星、資源衛星、間諜衛星都在此類軌道中運行
- 著名例子
  - 國際太空站（ISS）
  - 太空梭（STS）
  - 哈伯太空望遠鏡（HST）
  - Starlink



S119E009765



NASA

Mega constellations

- 近幾年快速發展的領域
- 以大量低軌通訊衛星建設衛星網路
- 典型例子
  - SpaceX Starlink
  - Oneweb
  - Amazon Kuiper
  - LEOSat(?)
  - 國網(?)、虹雲(?)、銀河(?)

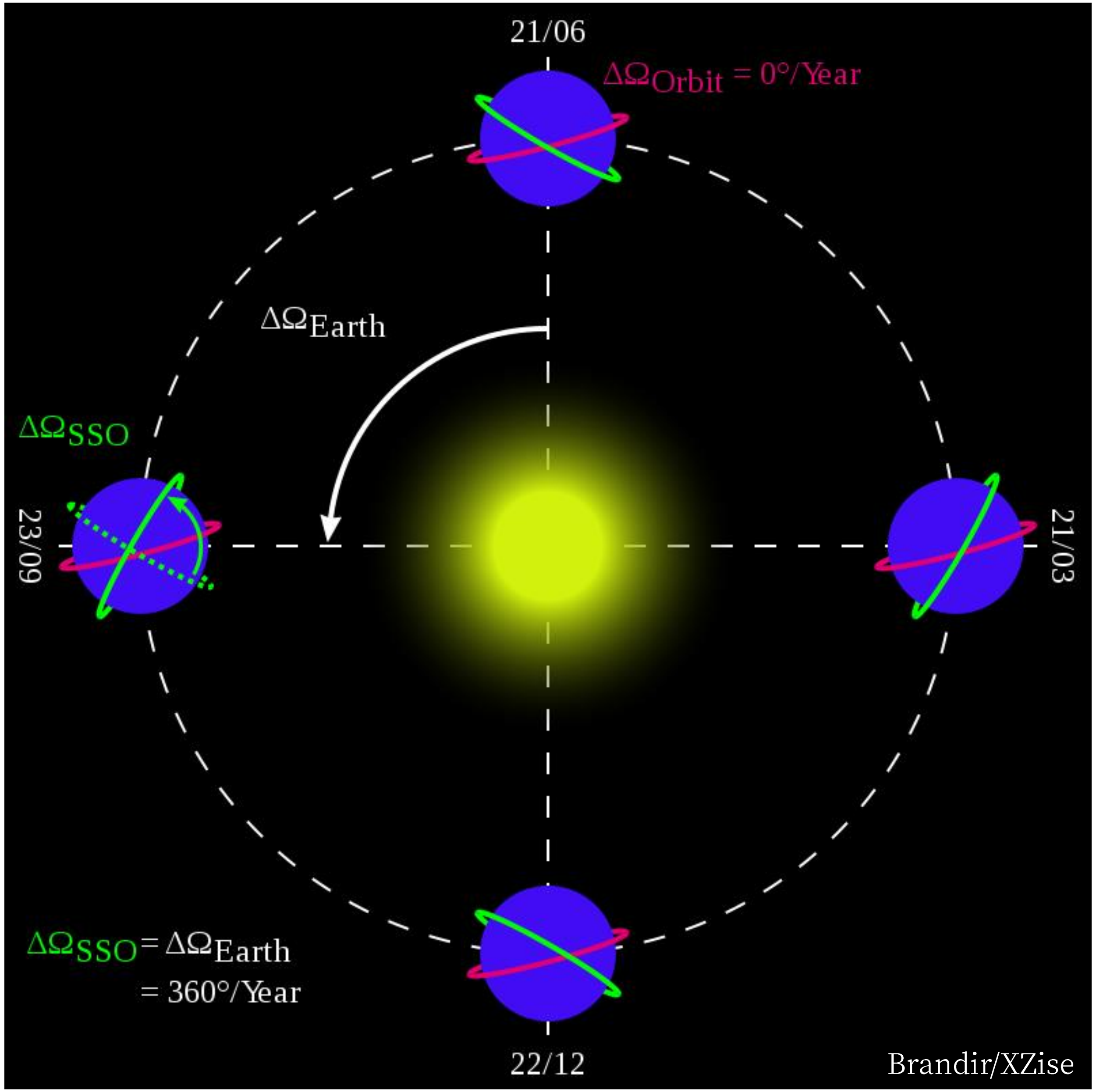
SpaceX

極軌道 Polar Orbit

- 高軌道傾角

  衛星經過兩極地區的軌道
- 衛星的軌道可以覆蓋大部分的地球表面，尤其是同步衛星無法看到的兩極
- 特殊的極軌道：**太陽同步軌道 SSO**
  - Sun-synchronous orbit
  - 軌道面進動與地球公轉週期相同
  - 衛星拍攝時太陽仰角恆定

    方便影像校正和分析，廣泛用於影像衛星

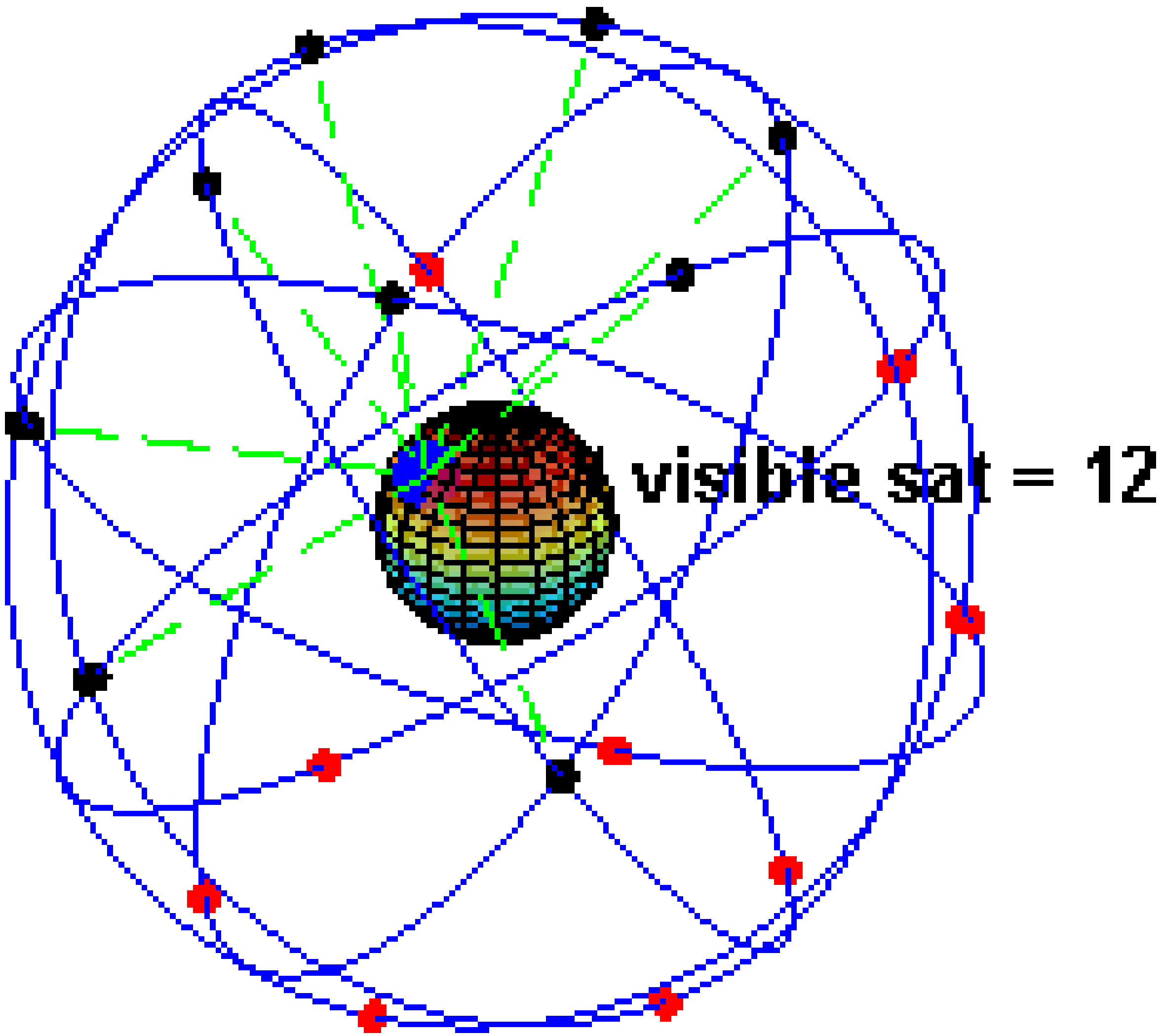


中地球軌道 MEO

典型使用者：全球導航系統

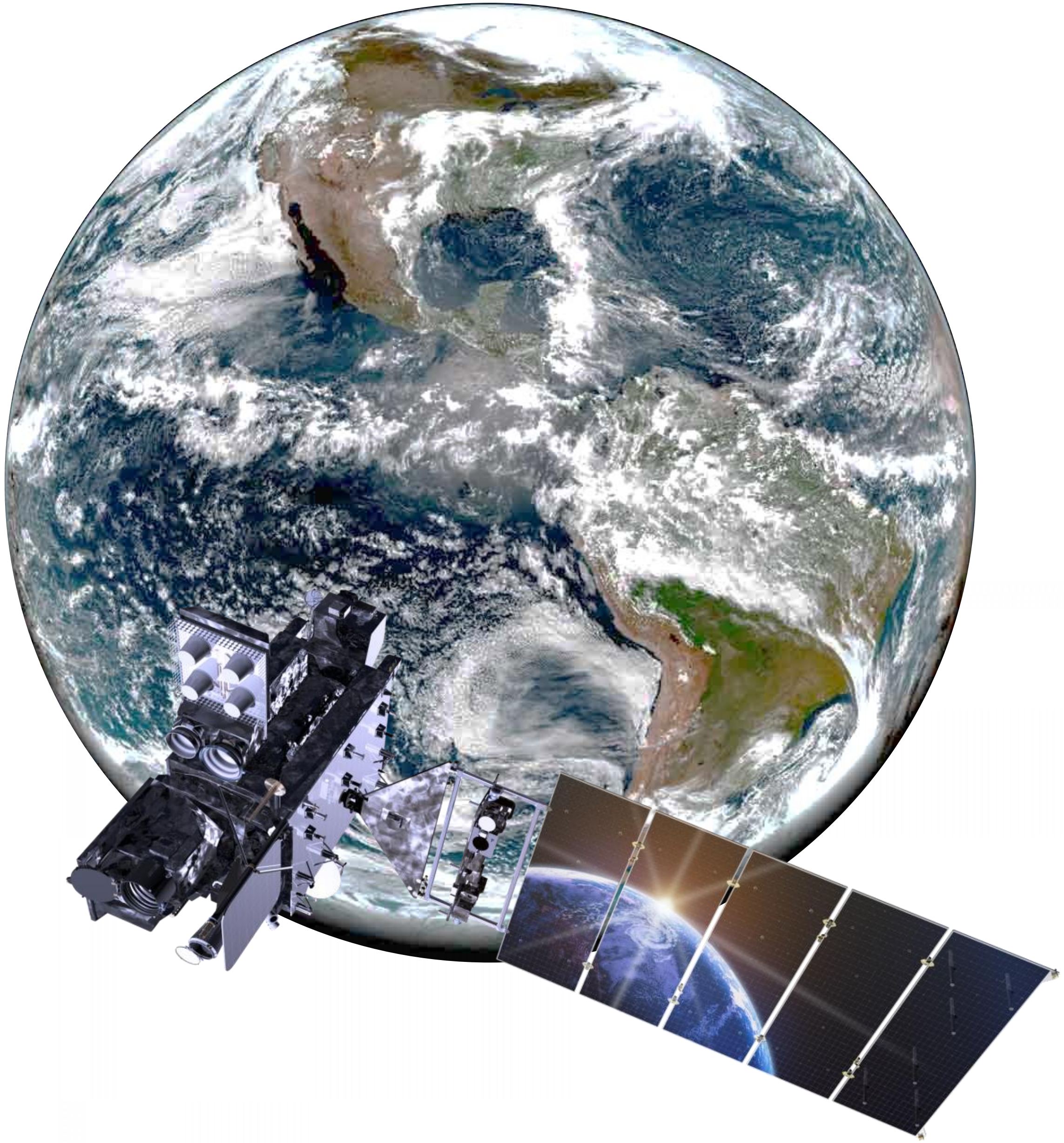
軌道高度約 20000 公里

- 美國 GPS
- 中國北斗
- 歐洲 Galileo
- 俄羅斯 GLONASS



地球靜止軌道 GEO

- 赤道上空，高約 36000 公里衛星
  繞地週期與地球自轉相同
  從地面上看，衛星固定於天球上
- 典型使用者
  - 同步氣象衛星（e.g. GOES、向日葵）
  - 同步通訊衛星（e.g. SES、TDRS）
  - 同步監視衛星（e.g. SBIRS）



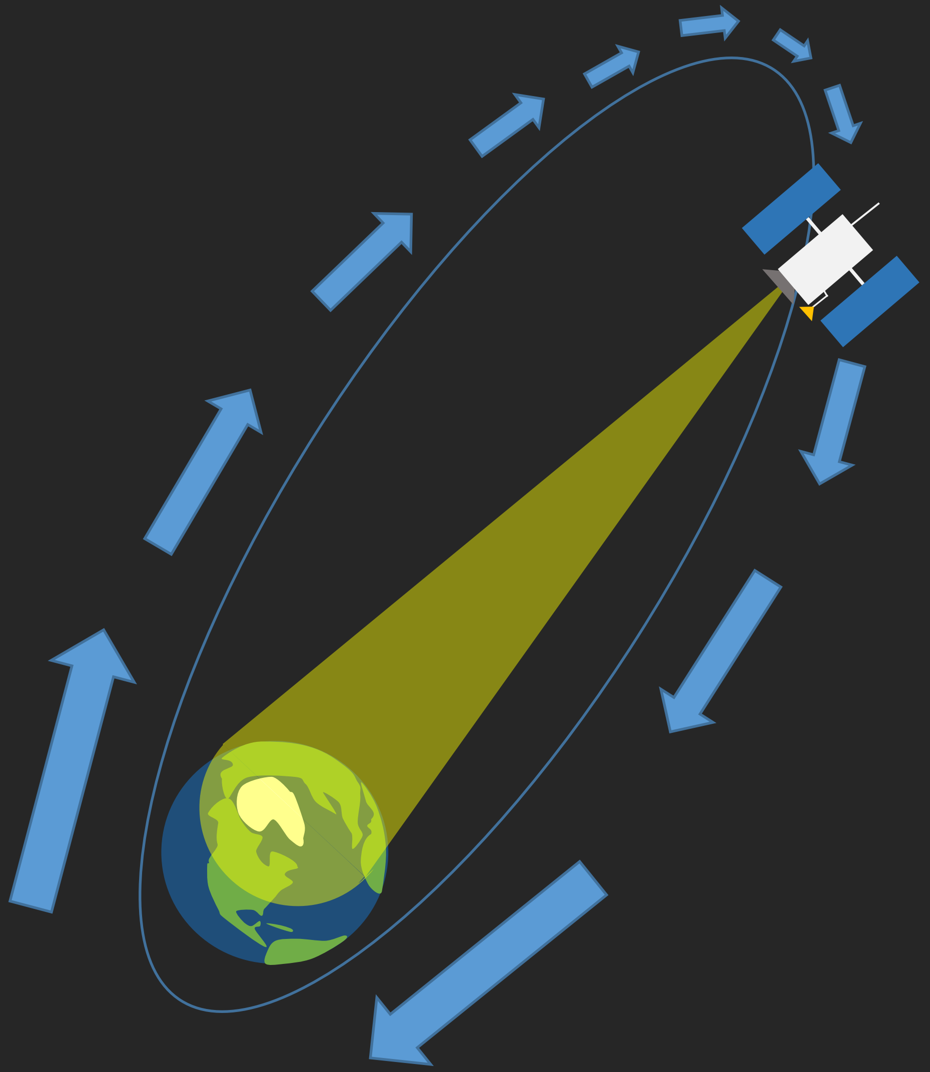
NOAA/NASA

高橢圓軌道 HEO

- 具有高離心率的軌道

  通常為了強化對高緯地區的長時間連線

  或是遠離地球干擾
- 典型例子
  - 閃電軌道 Molniya orbit
  - SBIRS HEO
  - 錢卓太空望遠鏡 Chandra



次軌道 Sub-orbit

- 軌道與地面有交點
  無法完整環繞地球的軌道
- 常見使用者：
  - 探空火箭 Sounding Rocket
  - 彈道飛彈 Ballistic Missiles

霍曼轉移軌道 Hohmann Transfer

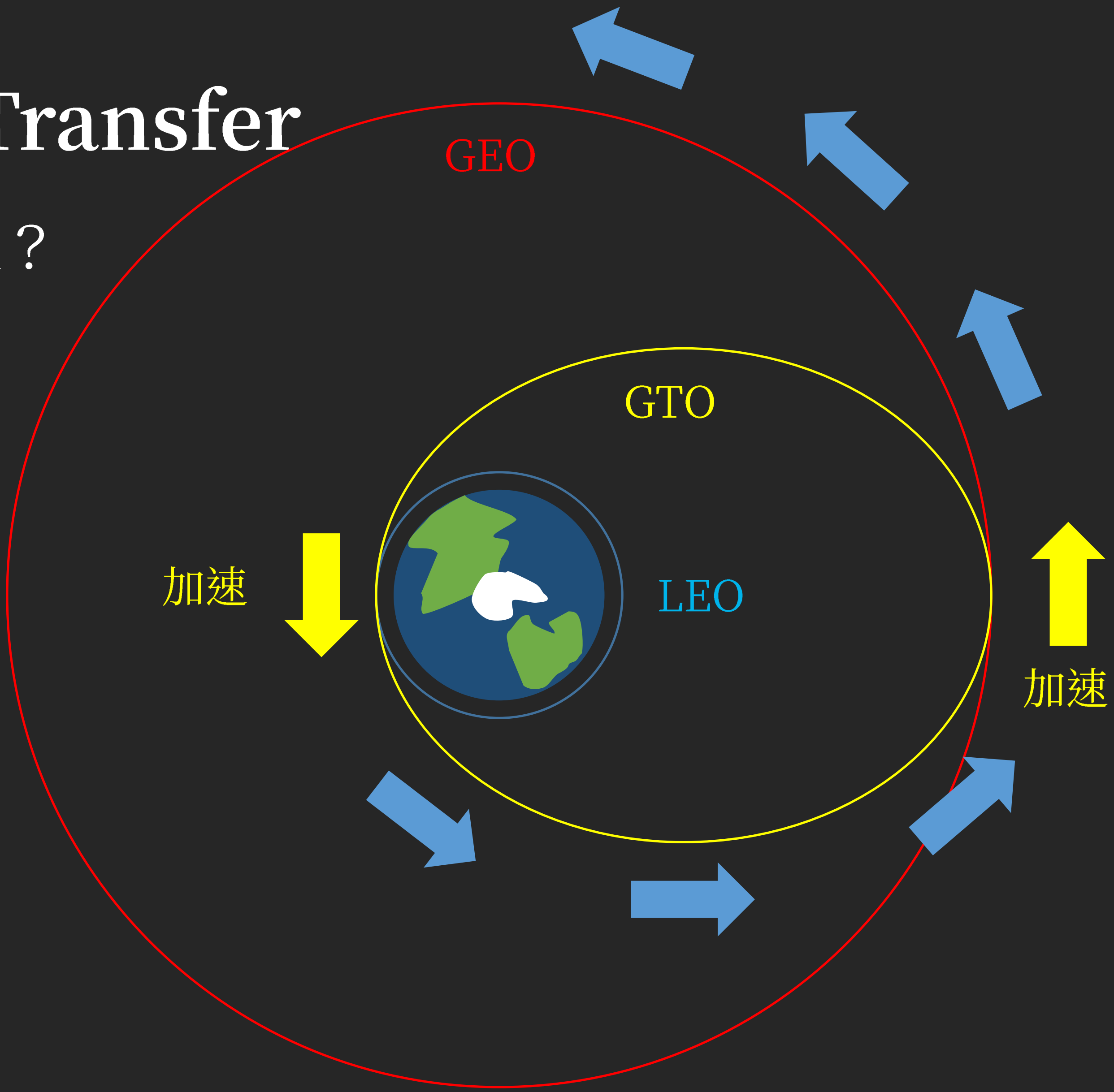
- 如何讓衛星從一個軌道前往另一個軌道？
- 最簡單的轉移方式：

  霍曼轉移 Hohmann transfer orbit

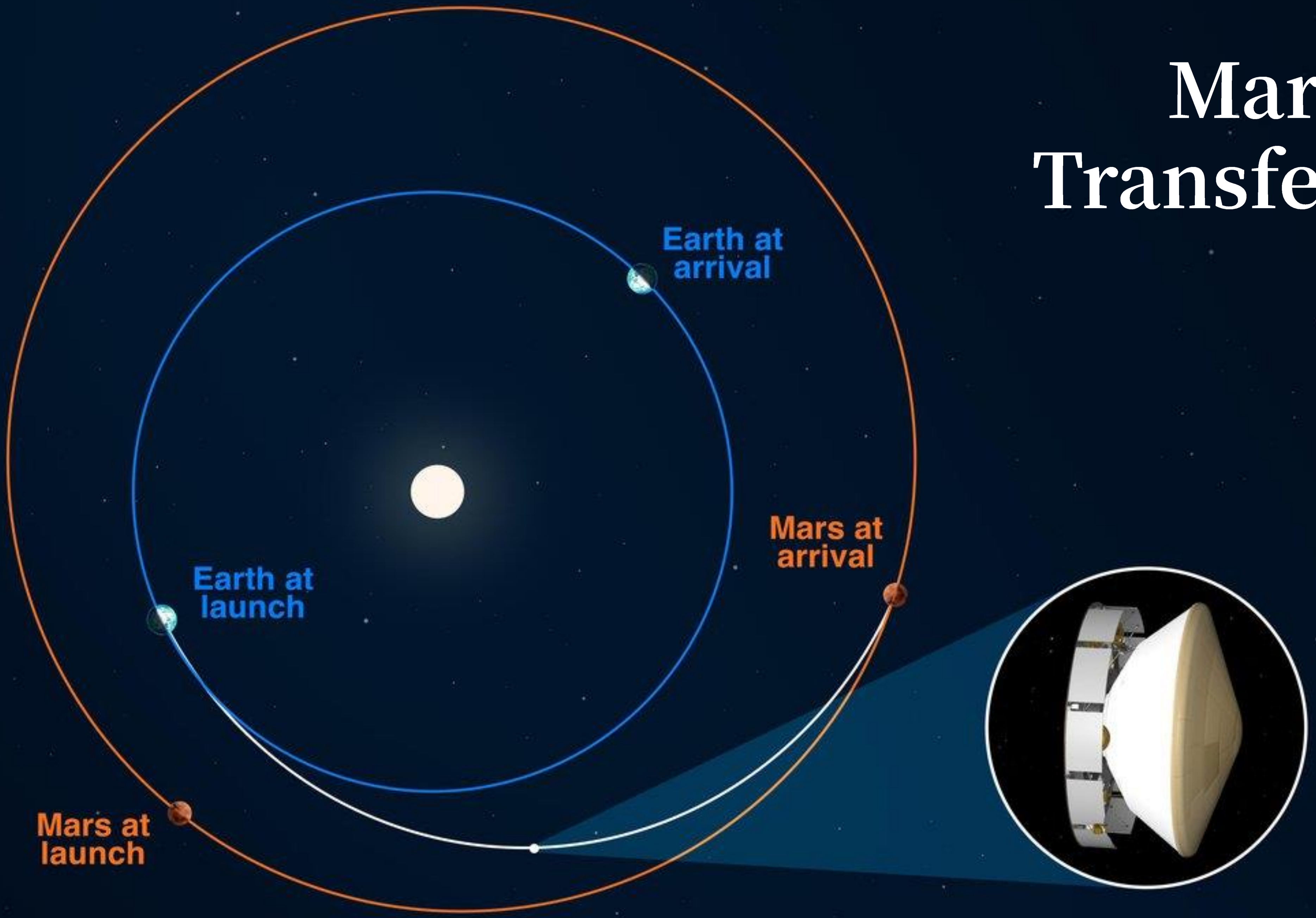
  以一個橢圓形軌道的近心與遠心點

  將現存軌道與目標軌道相連
- 為進入這個橢圓軌道

  需要進行兩次加速



Mars Transfer



JPL

回想：

$$a = r_0(1-e^2)^{-1}, r_0 = \frac{L^2}{GMm^2}, e^2 = 1 + \frac{2Er_0}{GMm} \Rightarrow E = -\frac{GMm}{2a} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$$

因此給定一軌道上，衛星的速度是

$$v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

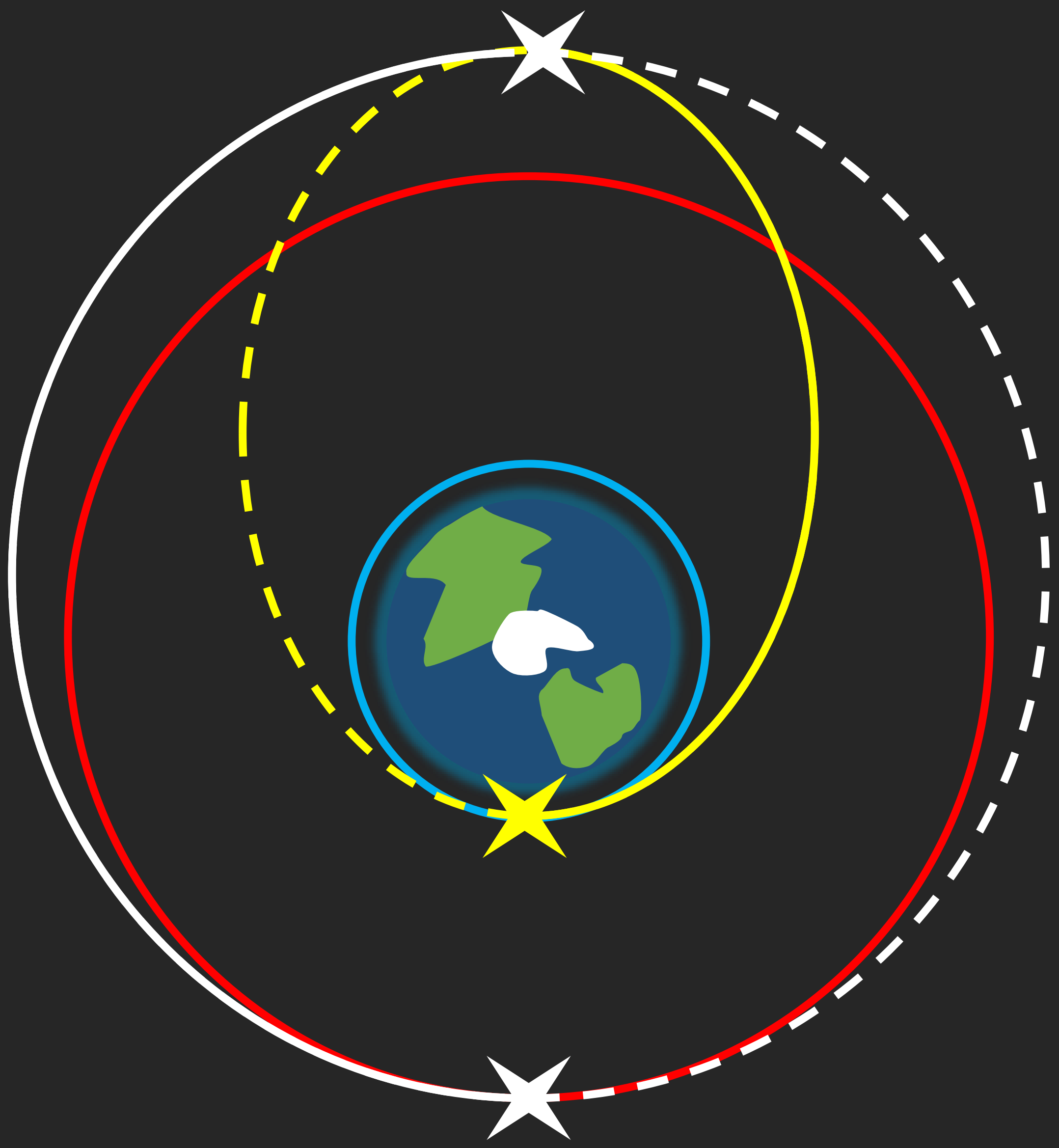
於是我們就可以計算出完成霍曼轉移的兩次加速各需要的速度增量是

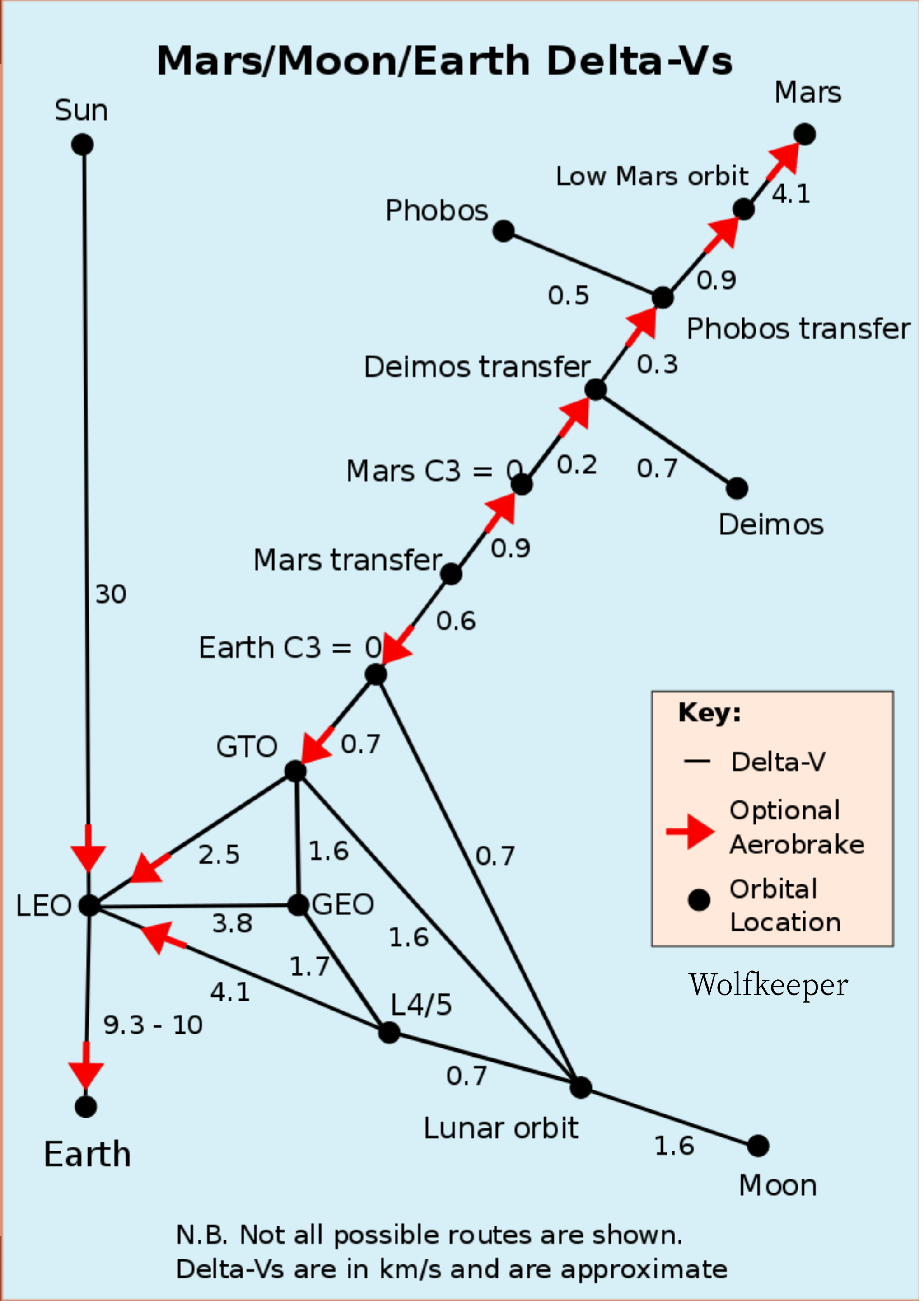
$$\Delta v_1 = \sqrt{\frac{GM}{r_1}}\left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1+r_2}} - 1\right)$$

$$\Delta v_2 = \sqrt{\frac{GM}{r_2}}\left(1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1+r_2}}\right)$$

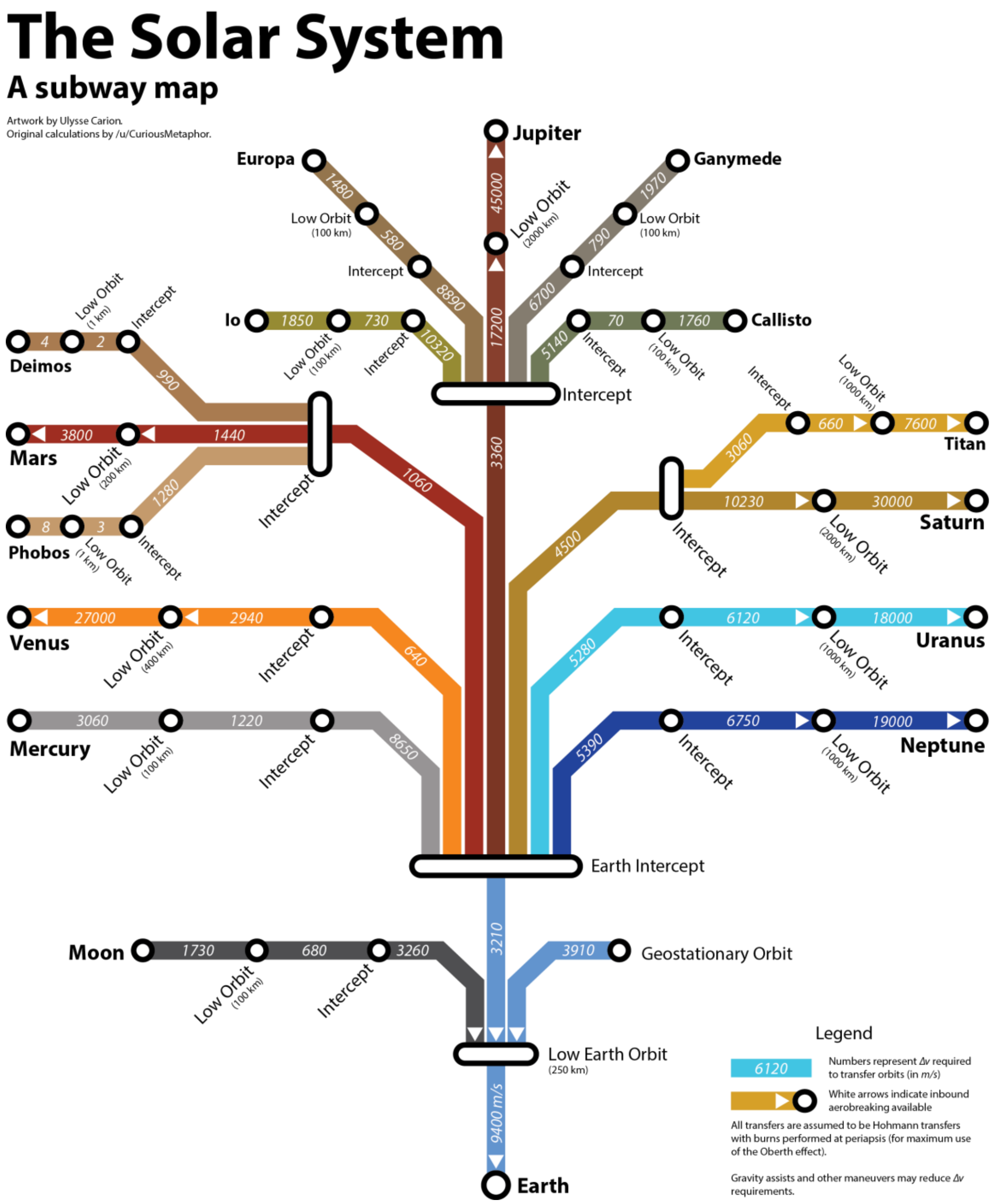
雙橢圓轉移軌道
Bi-elliptic Transfer

- 第一次加速將遠地點拉到目標軌道以上
  遠地點加速將近地點拉到目標高度
  近地點減速將遠地點拉到目標高度
- 三次加速，耗時較長
  但在 r2/r1 > 11.94 時更省推進劑





Wolfkeeper



Ulysse Carion

在軌會合 Orbital Rendezvous

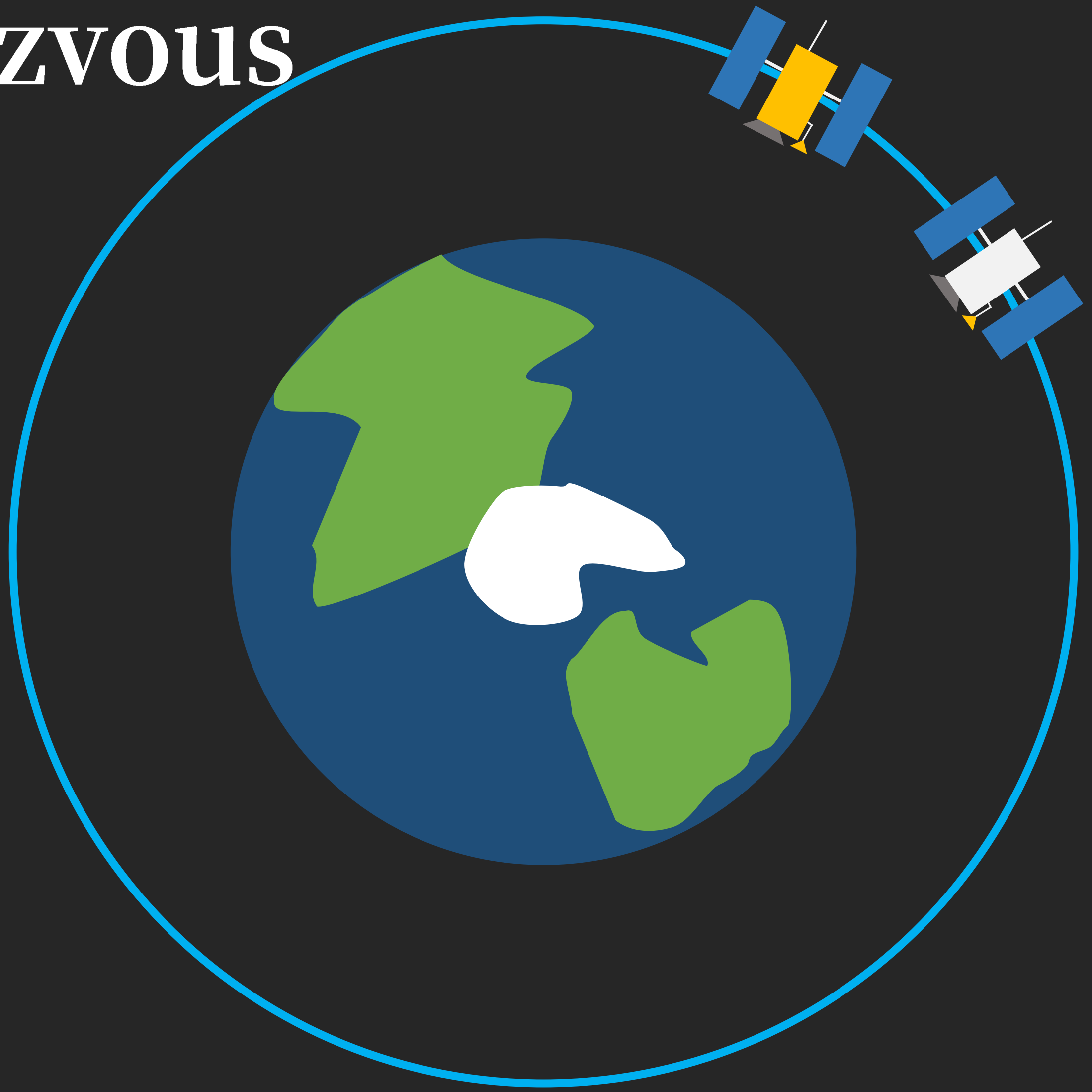
- 如何讓兩艘太空船在軌道上會合？
  - 一、兩者必須進入相同的軌道
  - 二、兩者必須有相同的真近點角
- 加速？

  => 進入更高能量、半長軸更長的軌道

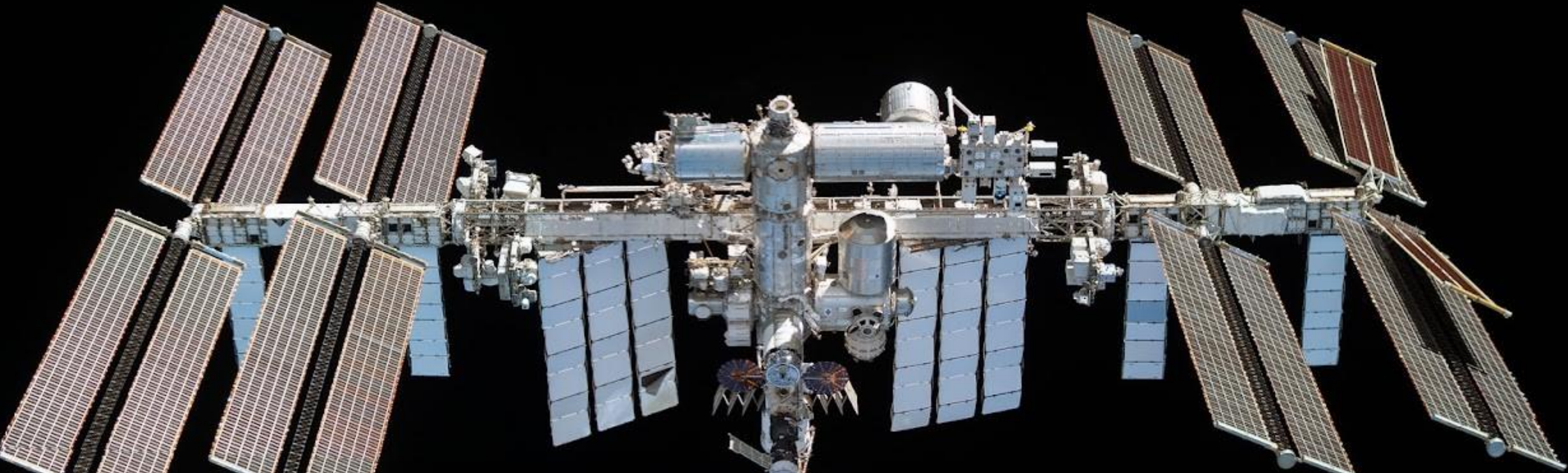
  => 軌道週期更長，走完一圈後反而離得更遠
- 減速！

  => 進入更低能量、半長軸更短的軌道

  => 軌道週期更短，走完一圈後才可能會合



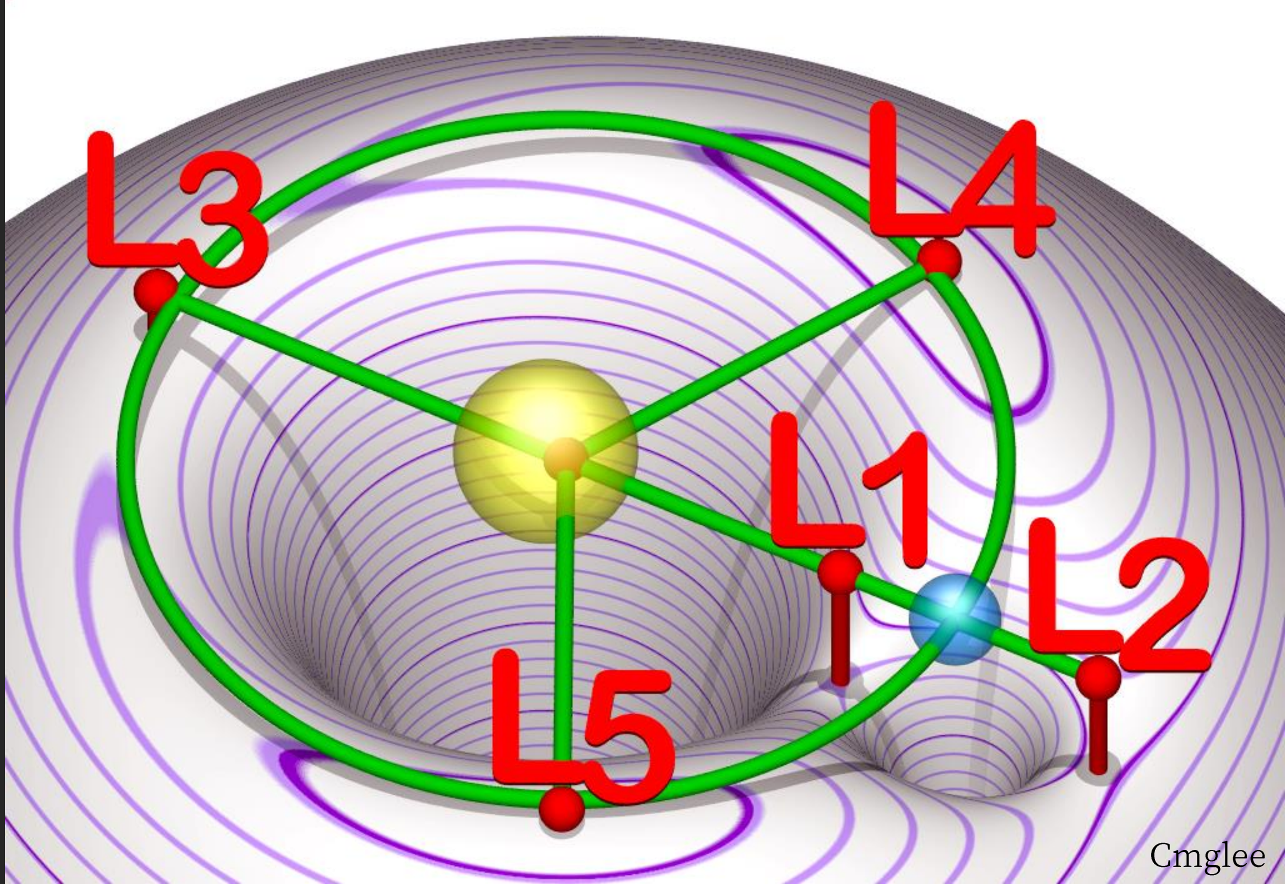
在軌會合：國際太空站

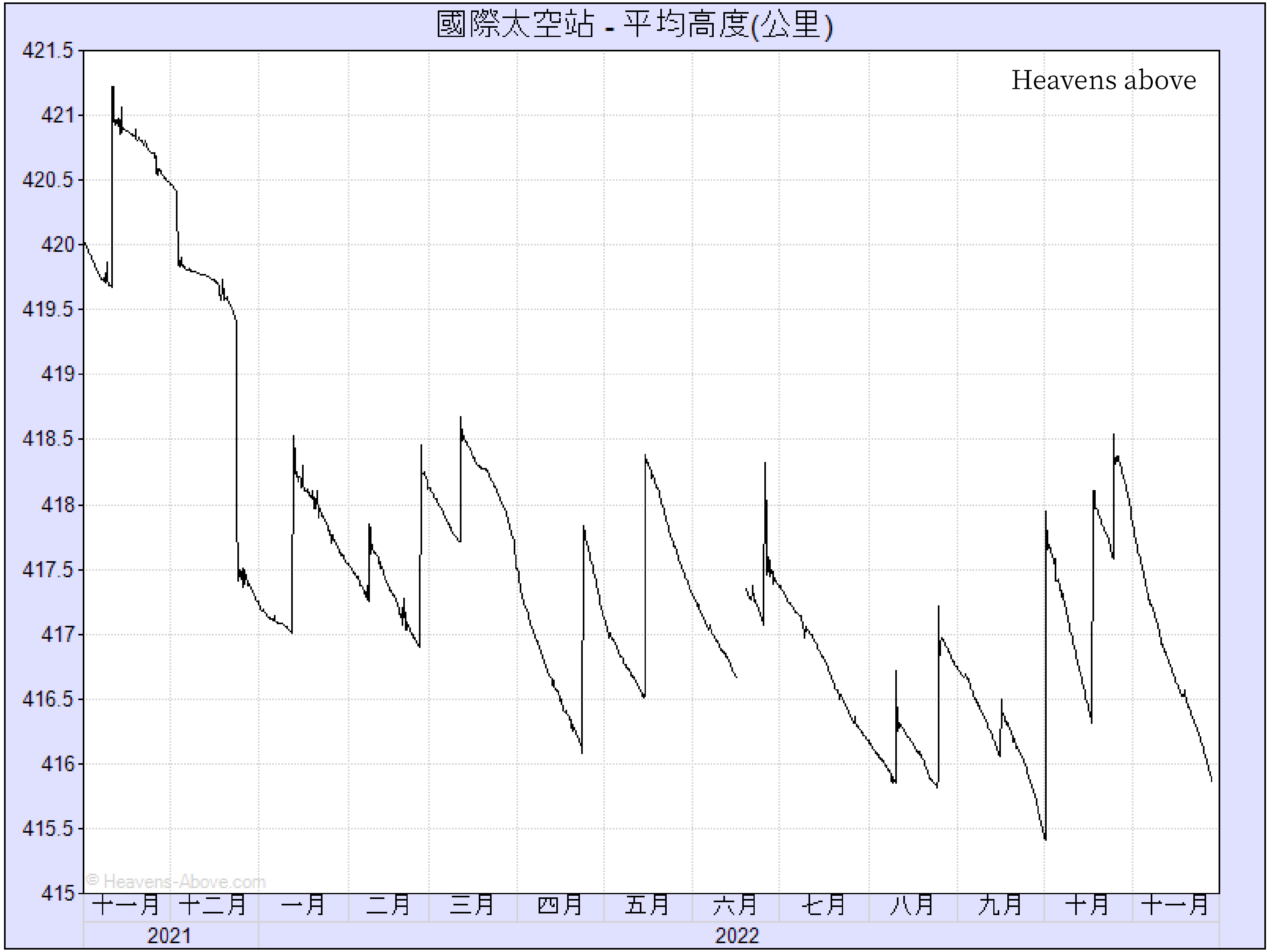


NASA

更困難的問題
更豐富的機會

- 大氣阻力：軌道衰減 Orbital decay
  氣動減速 Aerobraking
- 地球橢圓率、日月引力影響：
  軌道攝動 Orbital Perturbation
- 多體問題：
  拉格朗日點 Lagrange points
  軌道共振 Orbital Resonance
- 輻射壓 Radiation pressure：
  太陽帆 solar sail





ISS Orbital Decay

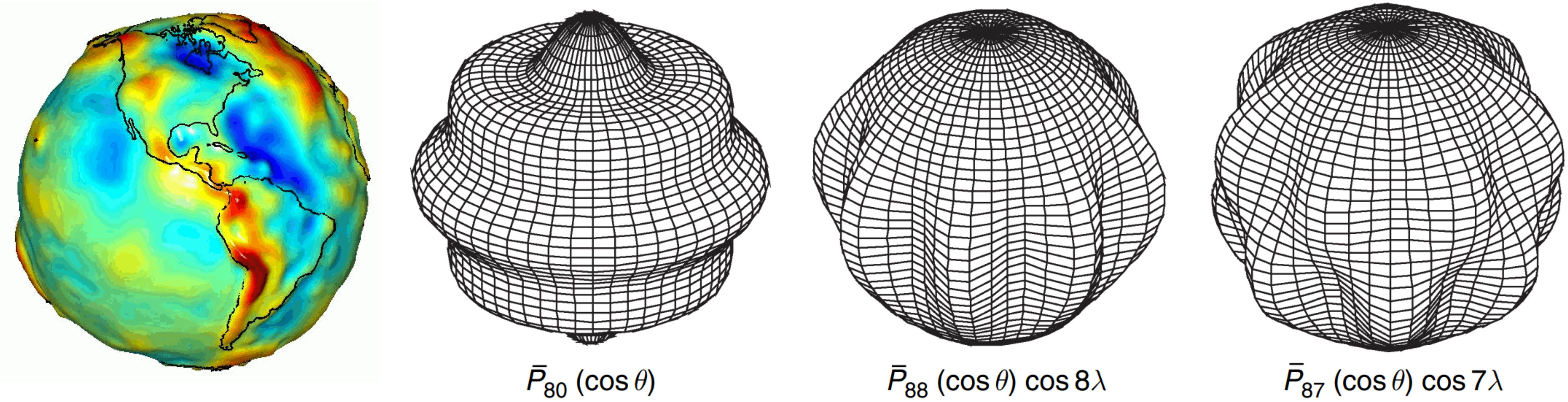
國際太空站軌道衰減

ISS reboost


ISS REBOOST

天體不均勻性 inhomogeneous gravitational field

- 天體的重力場往往都有程度不一的不均勻性，小天體尤其明顯
- 不均勻的重力場可以使用球諧函數（Spherical Harmonics）展開

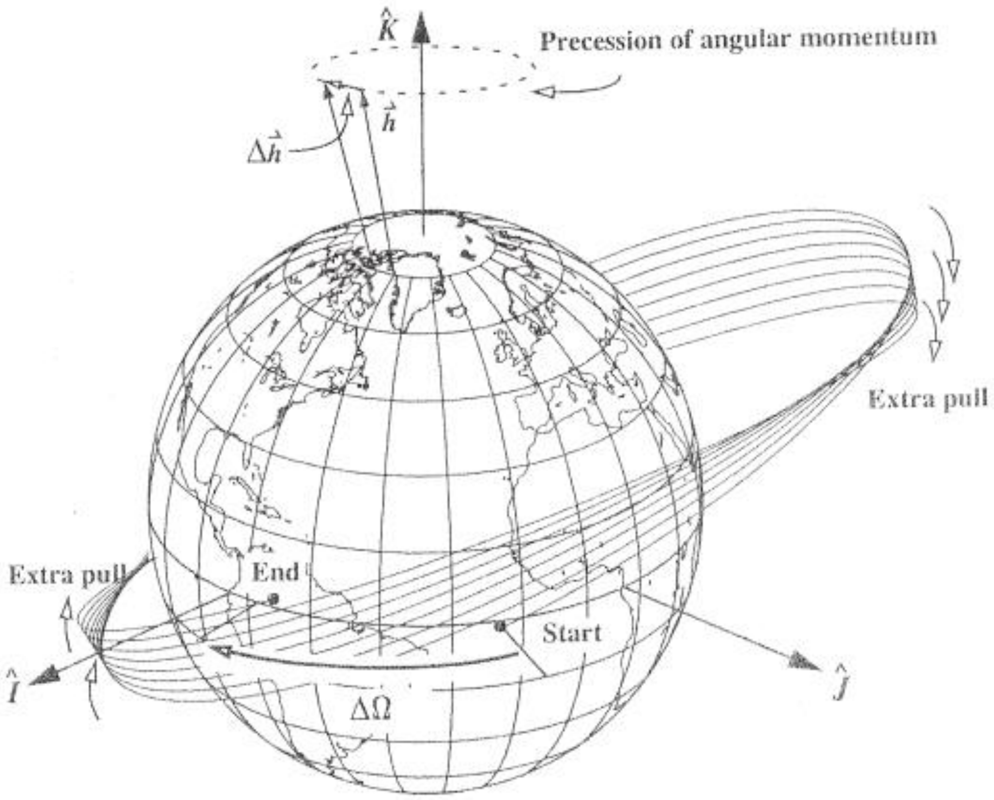


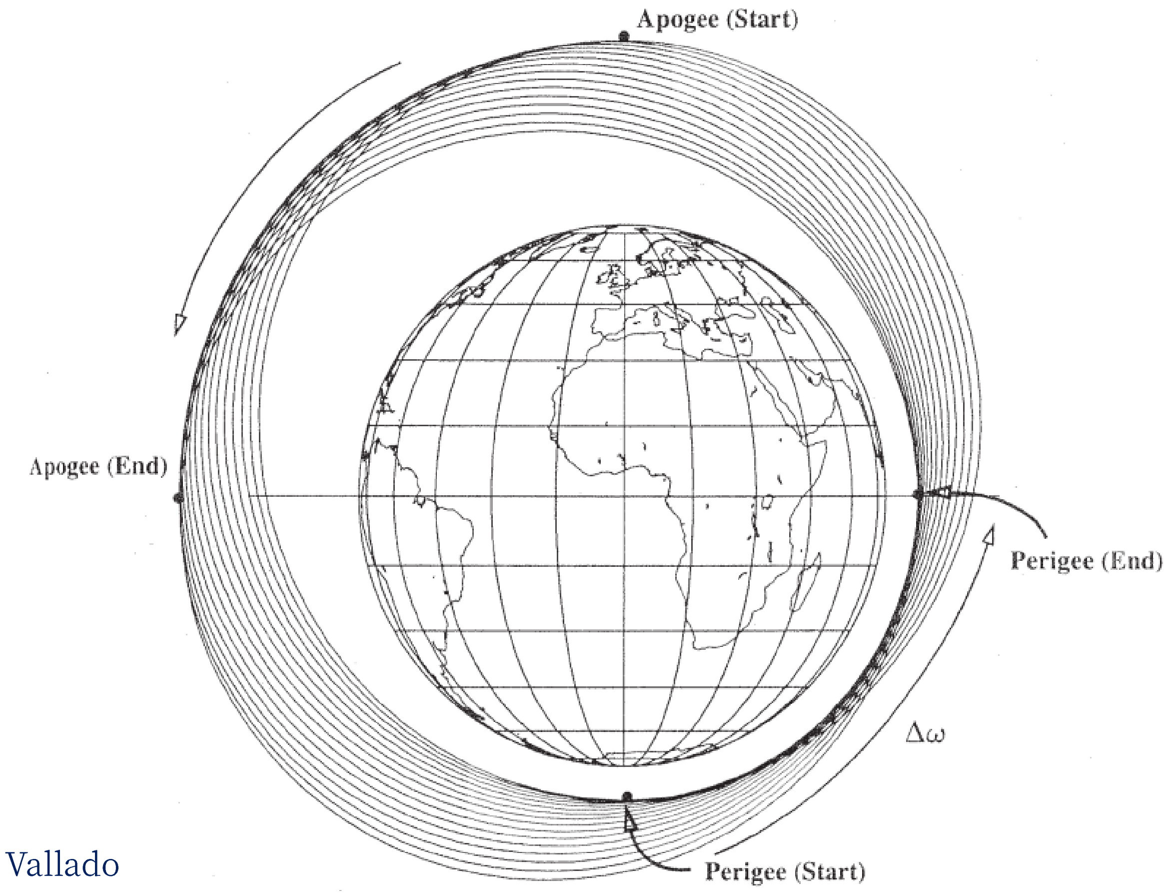
C. Jekeli 2007｜NASA/JPL/University of Texas Center for Space Research

J2 Perturbation

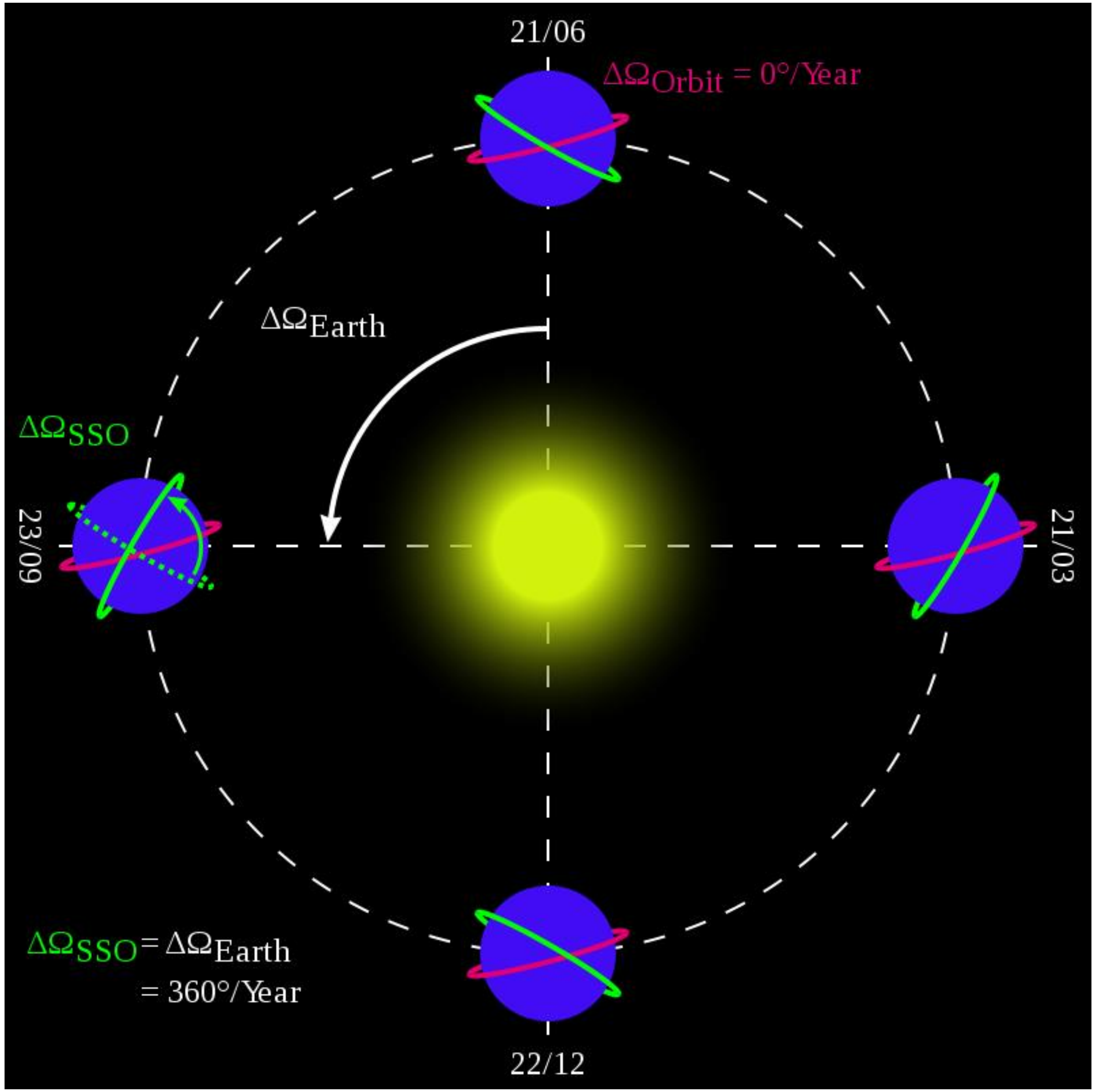
在球諧函數的所有基底中，J2（橢圓度）往往是影響最大的項。

能夠造成軌道的交點進動和近地點的震盪，多數情況下**不可忽略**。





Vallado

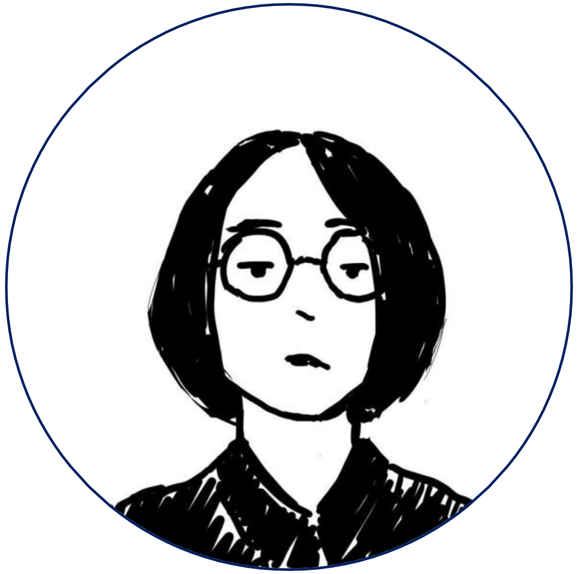


J2 perturbation

是太陽同步軌道 SSO 能存在的關鍵因素

$$\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = -\frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R_\mathrm{E}}{a(1-e^2)}\right)^2 \sqrt{\frac{GM_\mathrm{E}}{a^3}} \cos i$$

適當的軌道傾角和高度使進動週期為一年

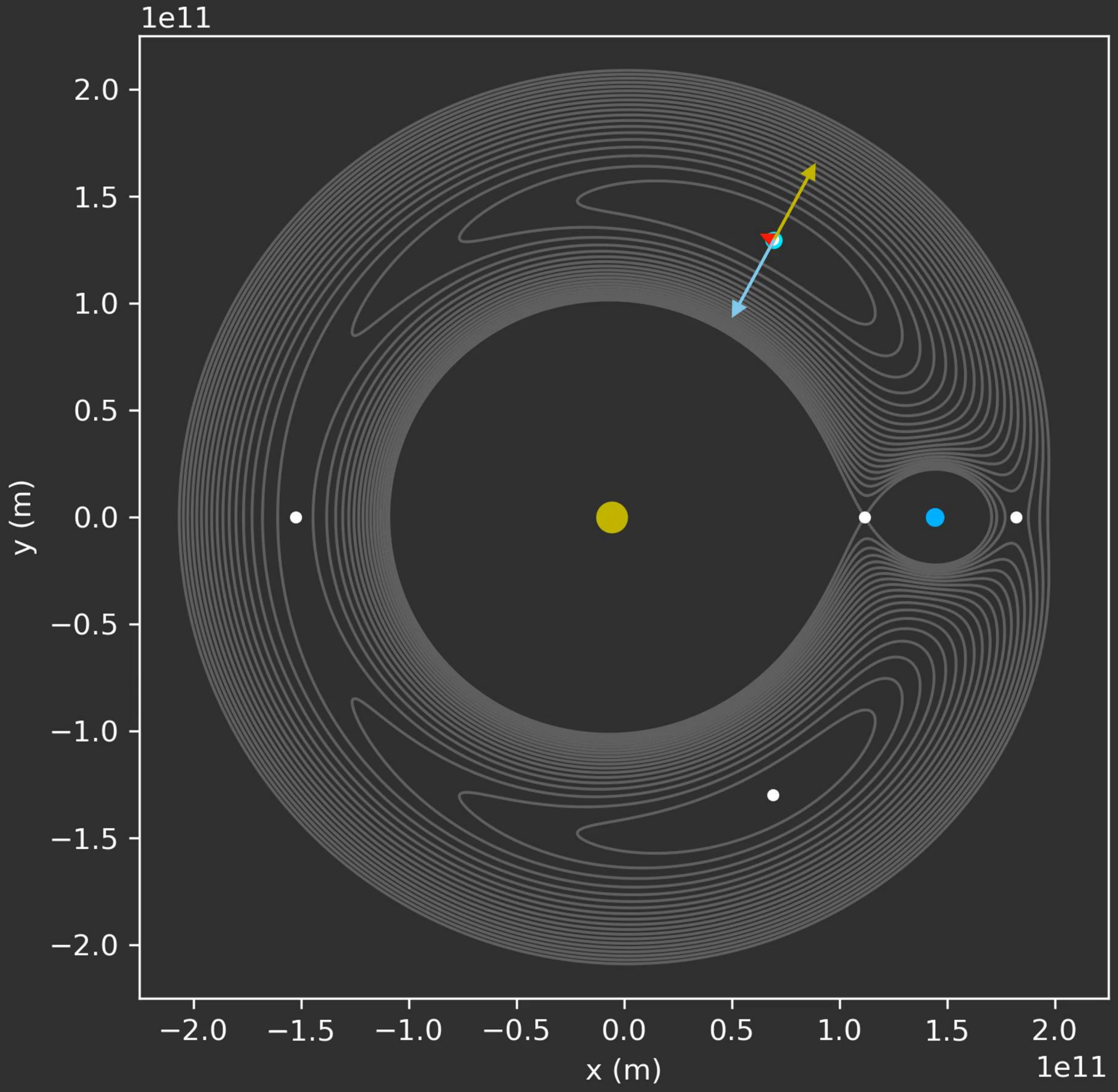


Cassini Grand Finale

NASA/JPL-Caltech

限制性三體問題 Restricted Three body problem

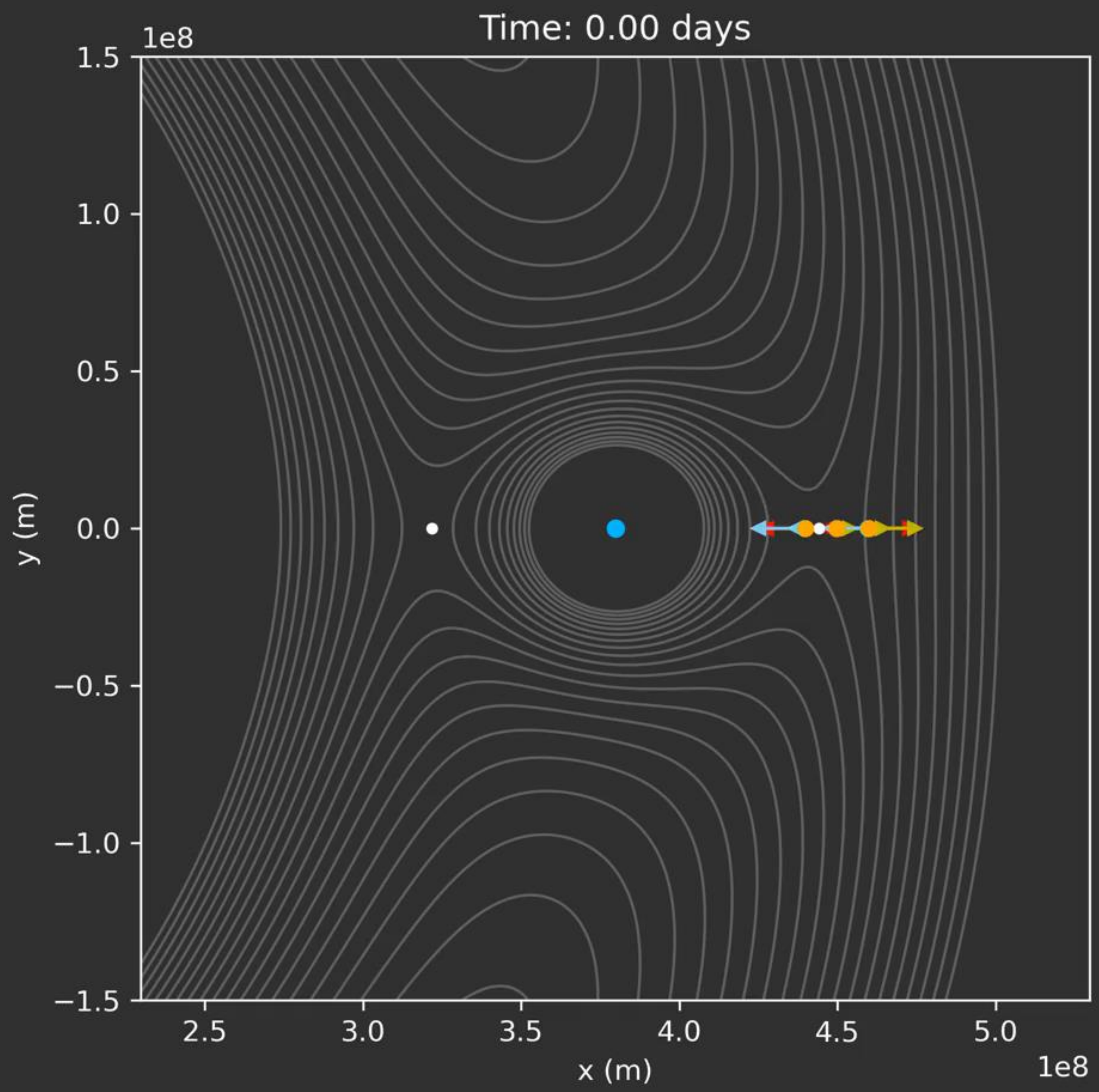
- 三體問題不存在解析通解（no closed-form general solution）。
  多數初始條件下系統是 deterministic but unpredictable in practice (chaos).
- 但在特定條件下，有些近似足夠有用。
- 典型的例子：圓軌道限制性三體問題（CR3BP）
  - 三個天體，M1 >> M2, M3 ~ 0。M1 與 M2 以圓形軌道互繞共同質心。
  - 一般在 Co-rotating frame 討論，存在**離心力**和**科氏力**兩個假想力。
  - 考慮重力與離心力行程的等效位能場，存在五個**拉格朗日點/平動點**。
  - CR3BP 下存在超過十個穩定的特殊軌道家族。



Lagrange Points

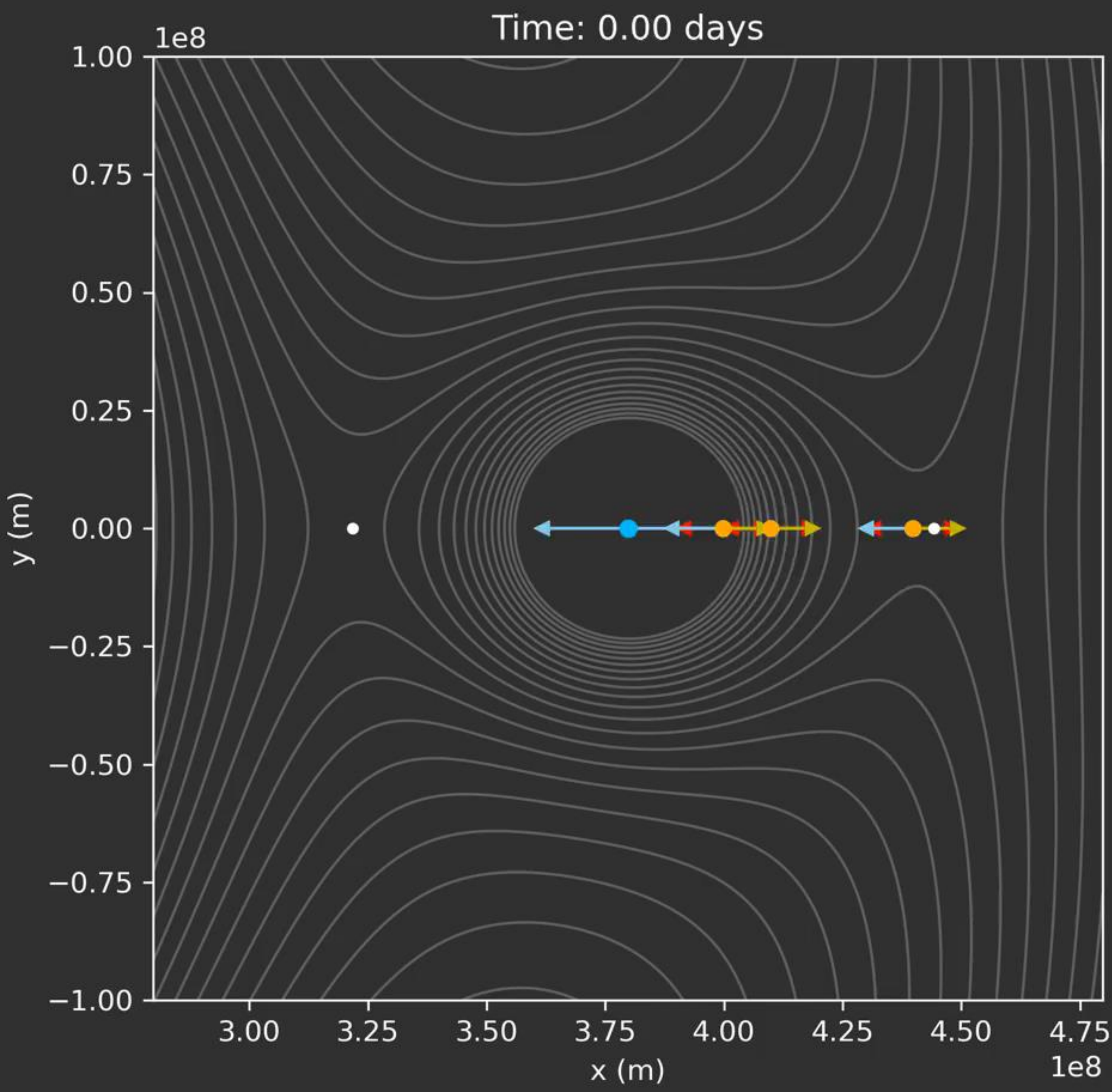
拉格朗日點

L4/L5 Stability



Distant Retrograde Orbit, DRO
遠距逆行軌道

Orbit Shape

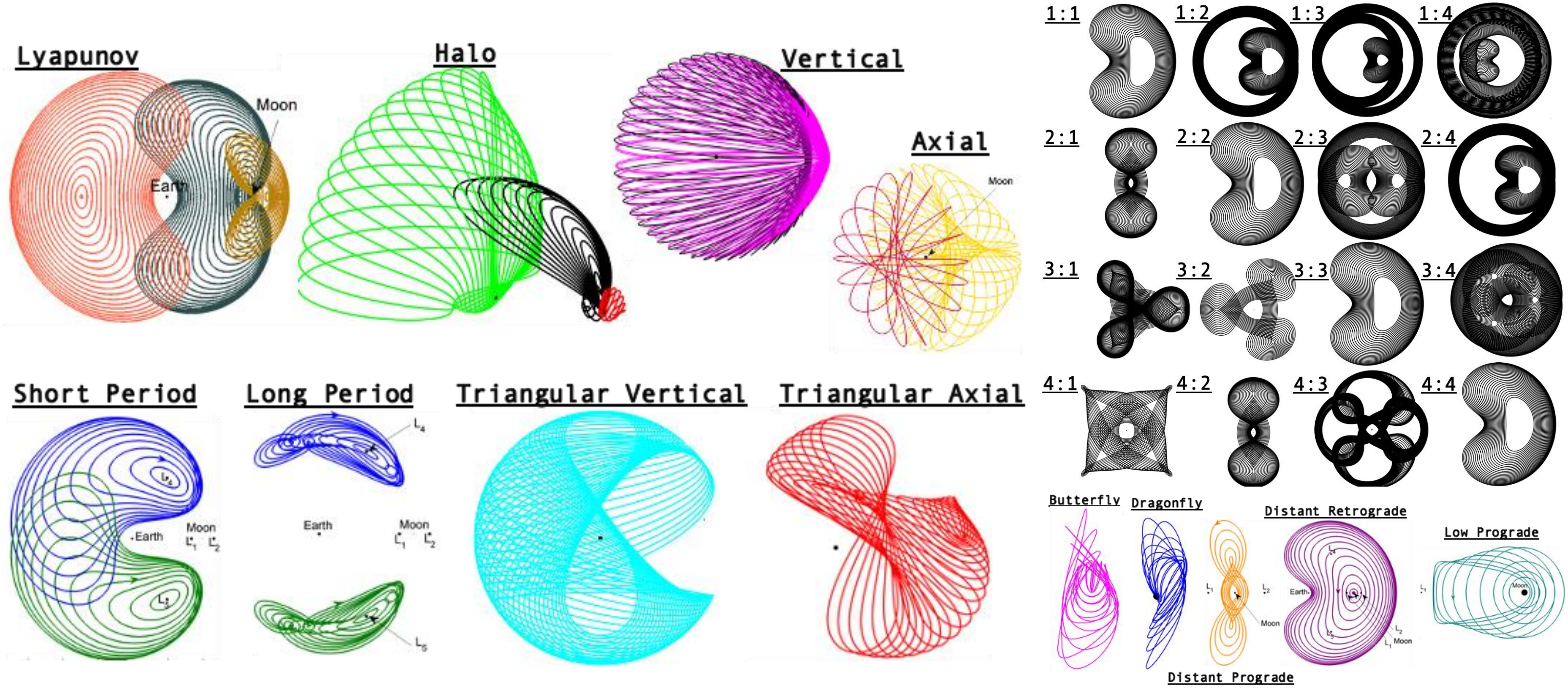


Distant Retrograde Orbit, DRO

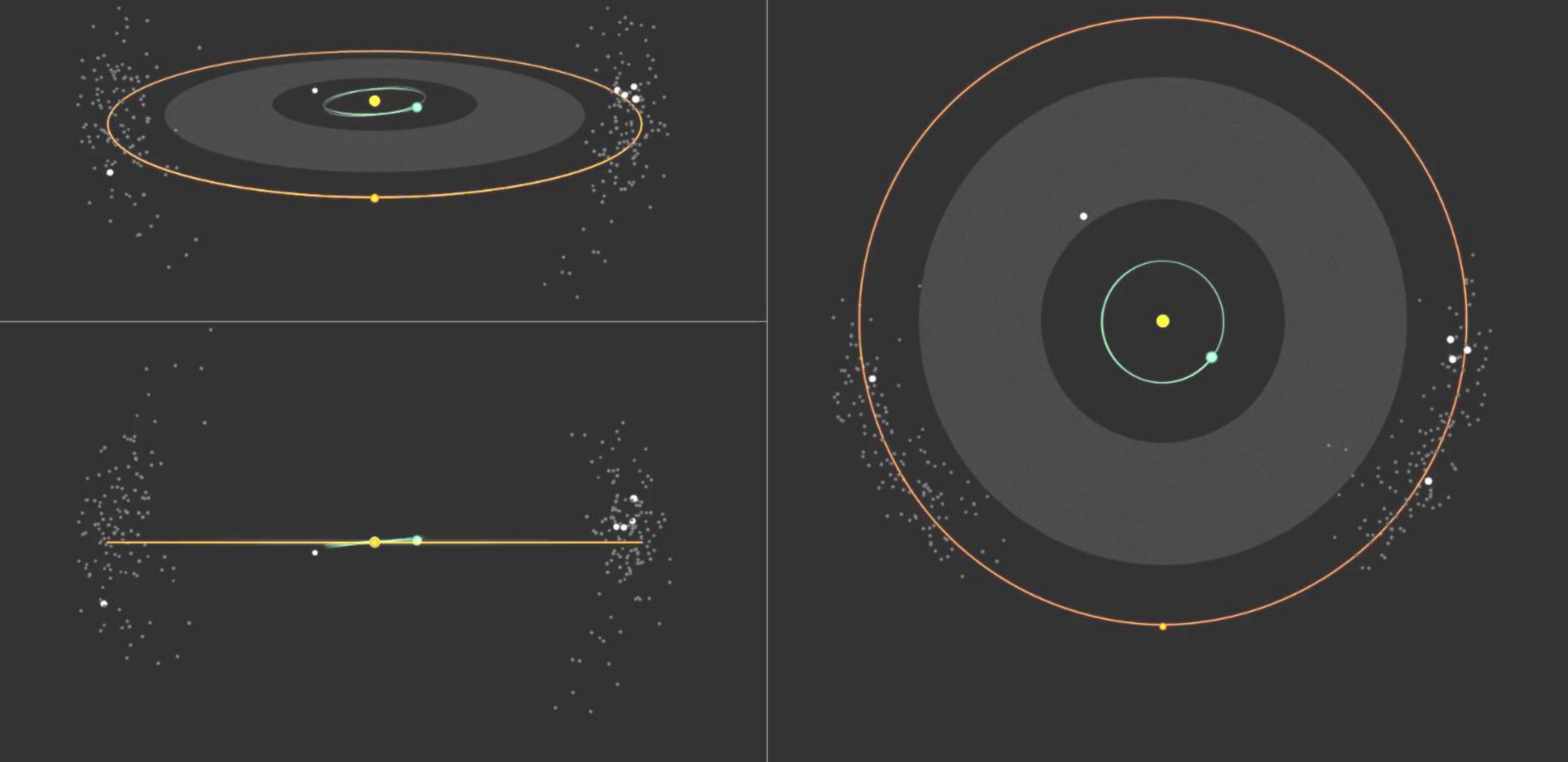
遠距逆行軌道

Stability

The Northern and Southern L_1 and L_2 NRHOs are periodic in the Circular Restricted 3-Body Model, and can be transitioned into quasi-periodic orbits in a higher fidelity model

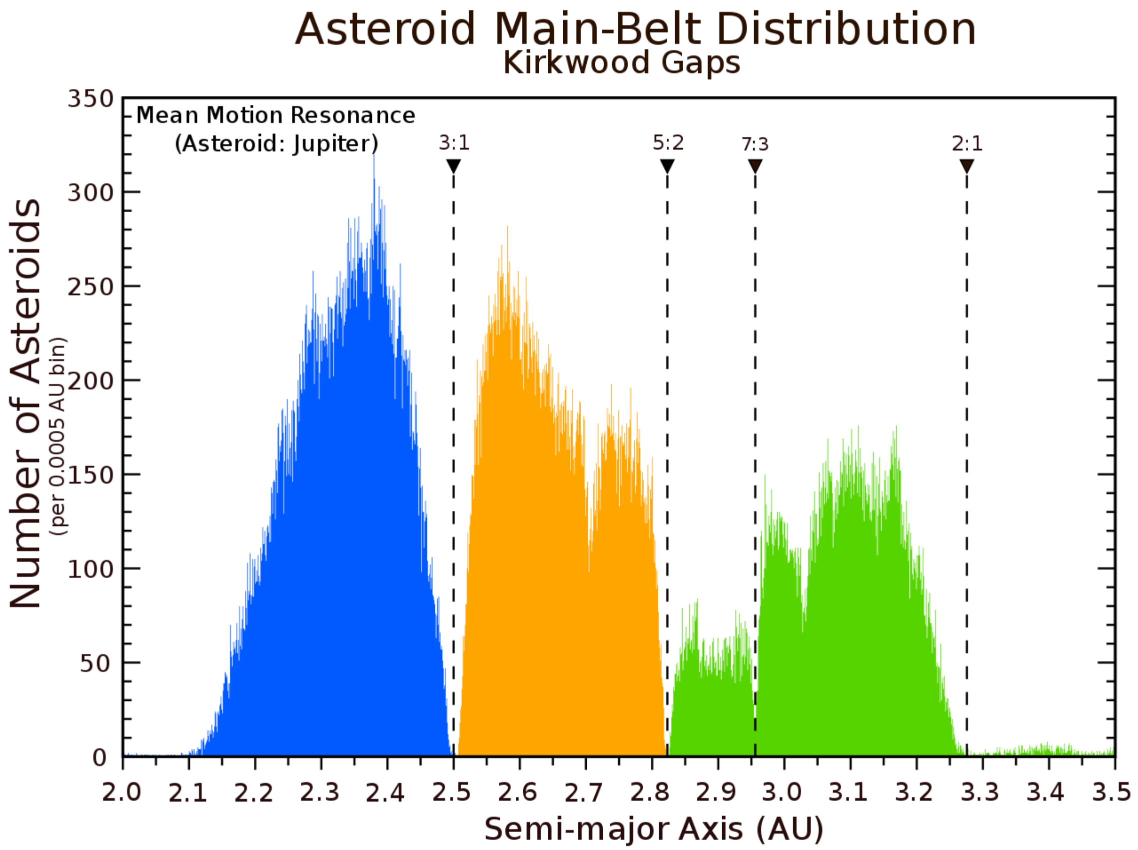

Lyapunov
Moon
Earth
Halo
Vertical
Axial
Moon
Short Period
Earth
Moon
L_4
L_5
L_1 L_2
Long Period
L_4
Earth
Moon
L_1 L_2
L_5
Triangular Vertical
Triangular Axial
1:1
1:2
1:3
1:4
2:1
2:2
2:3
2:4
3:1
3:2
3:3
3:4
4:1
4:2
4:3
4:4
Butterfly
Dragonfly
Distant Retrograde
Low Prograde
Moon
Earth
Moon
Distant Prograde

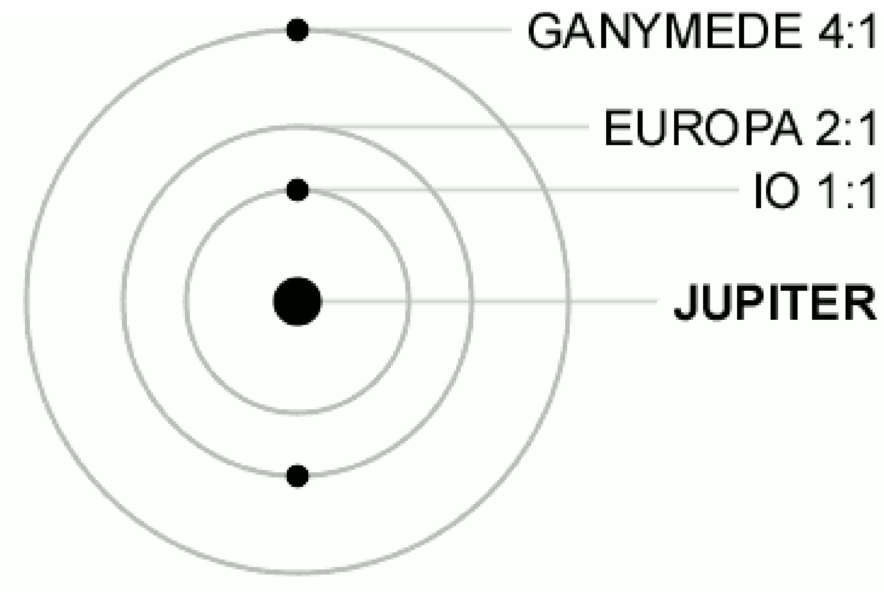
Jupiter Trojan asteroid and LUCY mission



軌道共振 Orbital Resonance

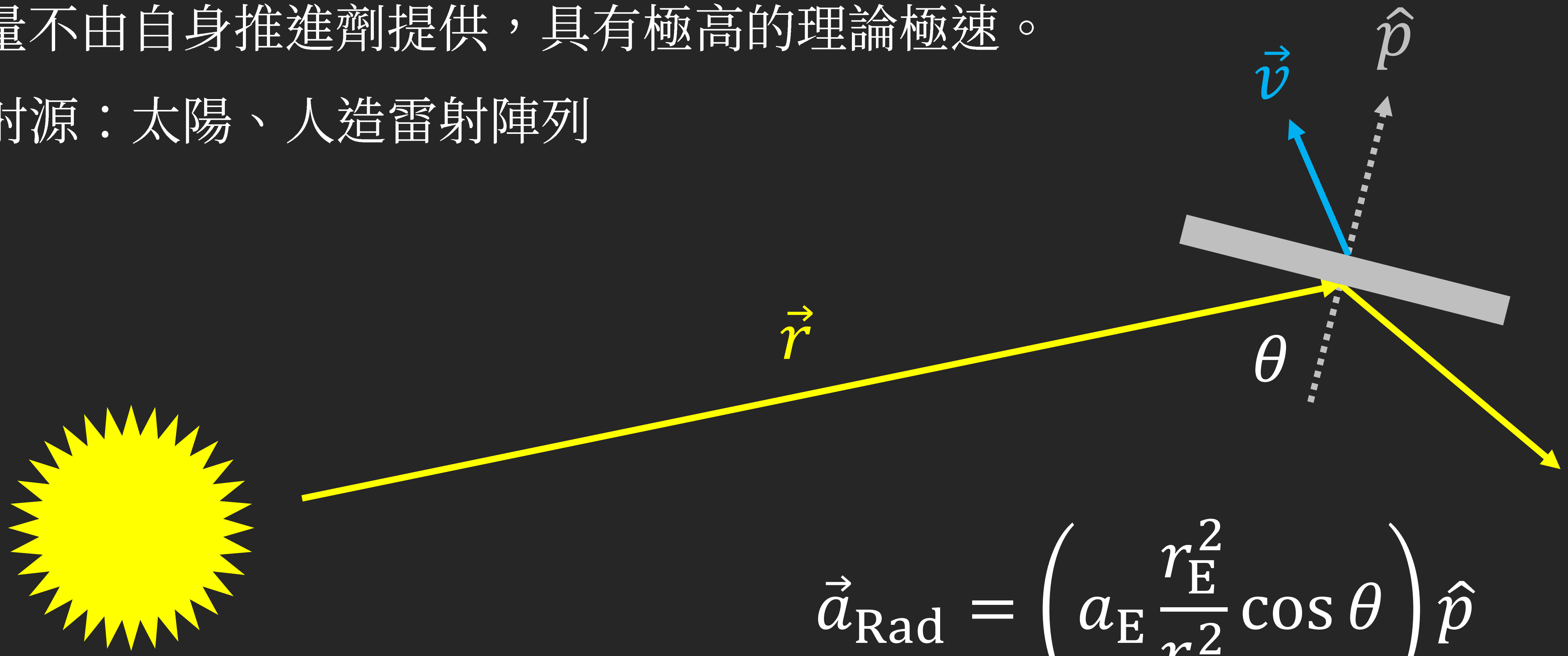
當天體的週期為簡單整數比，會最大化彼此的重力影響。但很難有精確的定性描述。



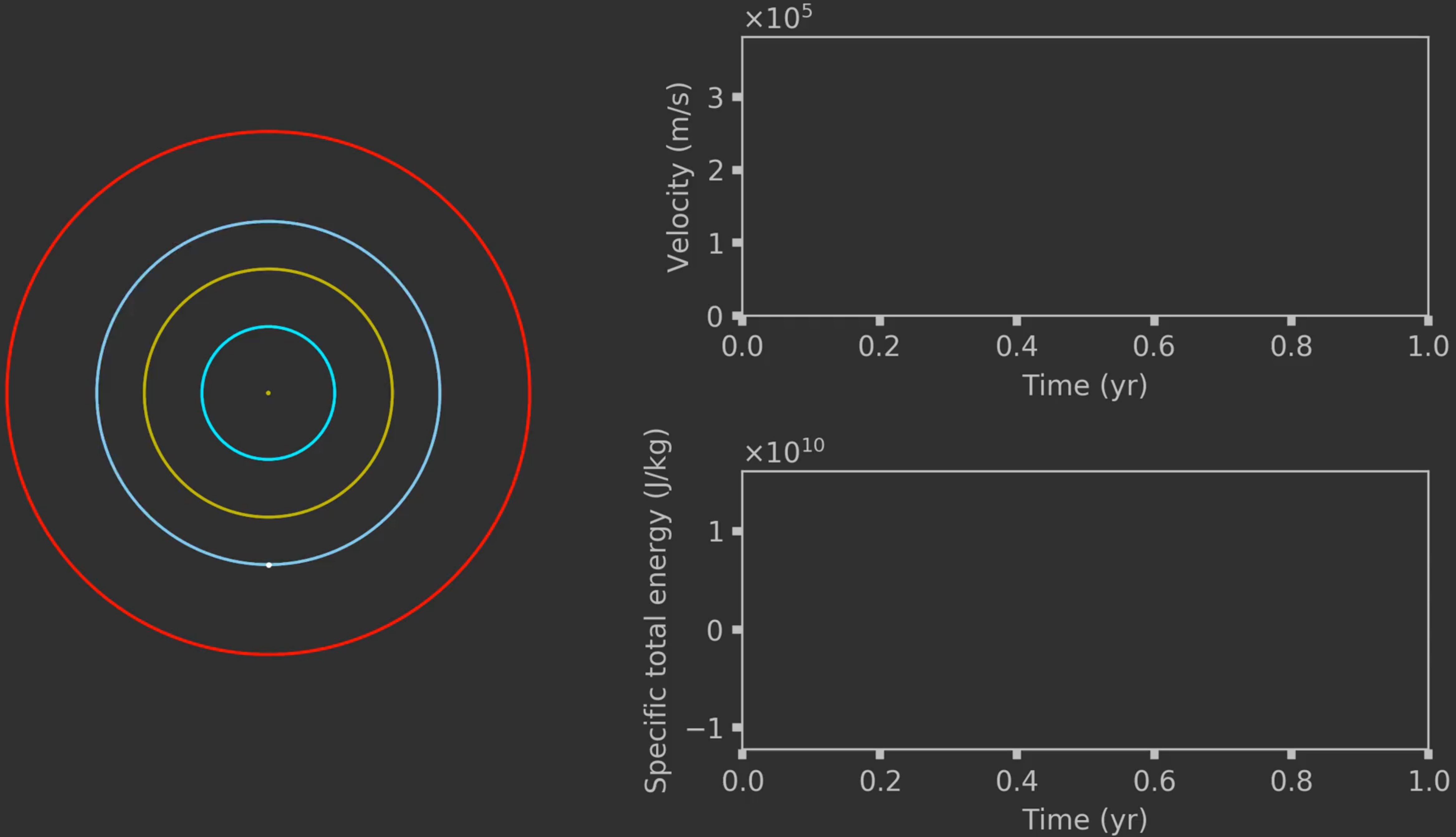


光壓與光帆 Radiation Pressure and Light Sails

- 衛星反射/吸收/發射光子時造成動量變化。
- 動量不由自身推進劑提供，具有極高的理論極速。
- 輻射源：太陽、人造雷射陣列



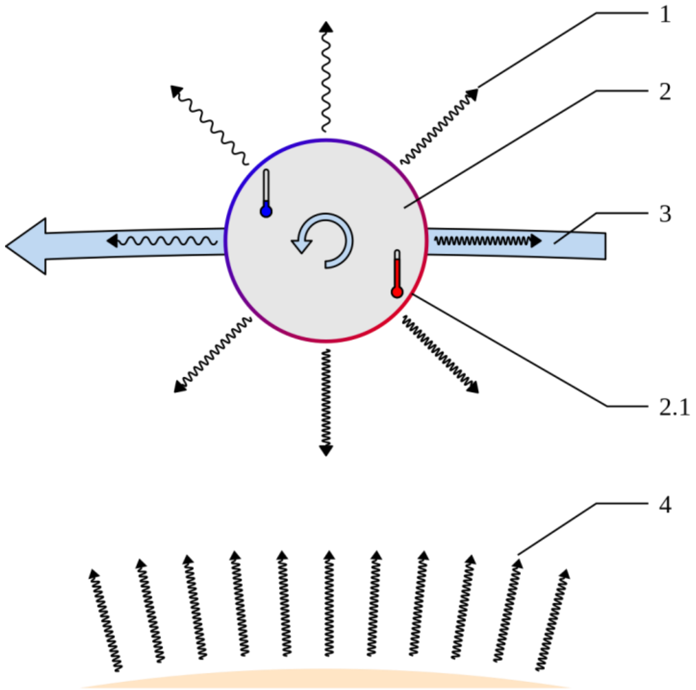
$$\vec{a}_{\mathrm{Rad}} = \left(a_{\mathrm{E}}\frac{r_{\mathrm{E}}^2}{r^2}\cos\theta\right)\hat{p}$$

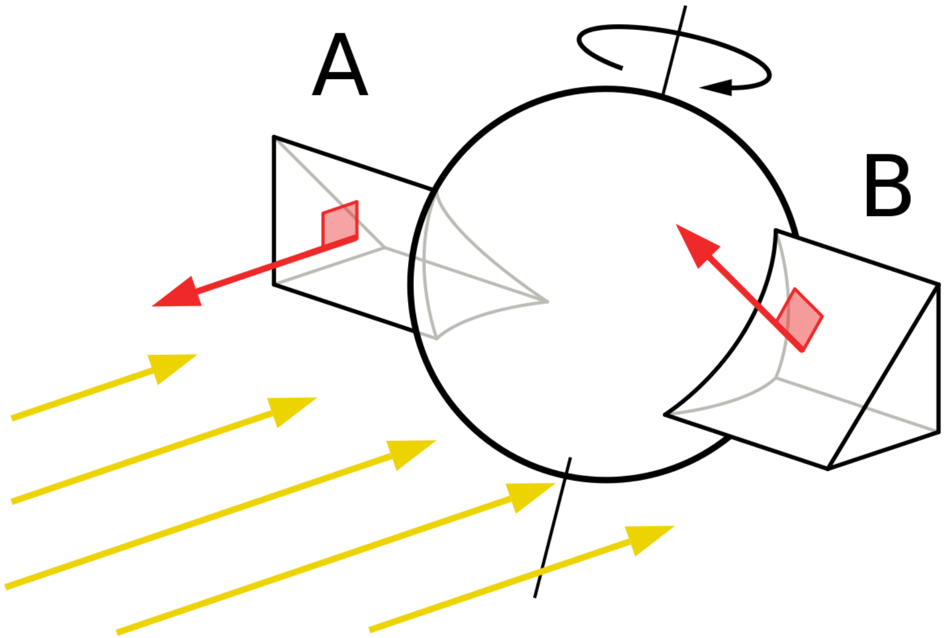


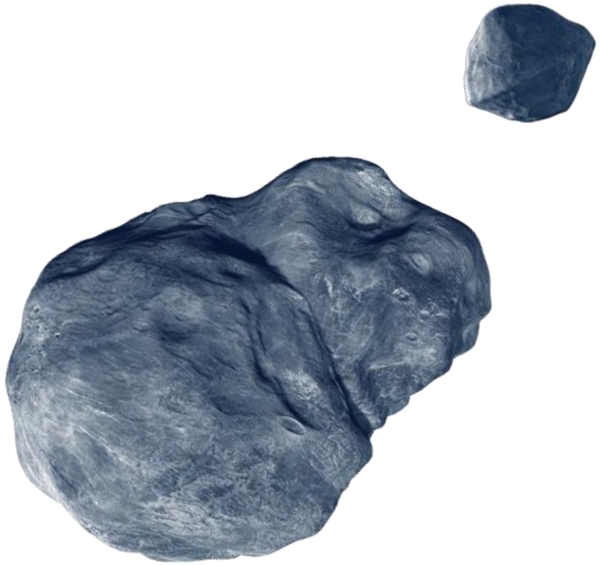
×10^5
Velocity (m/s)
0
1
2
3
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
Time (yr)
×10^10
Specific total energy (J/kg)
−1
0
1
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
Time (yr)

Yarkovsky & YORP effect

光壓會影響小行星的軌道（Yarkovsky）與自轉（YORP）。







Graevemoore | Inductiveload | The Johns Hopkins University Applied Physics Laboratory LLC.

小結 Summary

Ask yourself：

- 克卜勒行星運動三定律可以如何從牛頓運動定律與重力理論推導出來？過程中做了哪些假設？可以應用在哪些情境？
- 常見的衛星軌道有哪些？它們各自有什麼特色？
- 如何在軌道之間轉移？如何計算需要的速度增量？
- 有哪些 second order 的因素會影響天體的軌道？這些因素與哪些太空或天文領域的現象有關？


KERBAL
SPACE PROGRAM
ENHANCED EDITION COMPLETE
購買 Kerbal Space Program
特別促銷！剩餘時間 34:45:03
-75%
~~NT$ 868~~
NT$ 217
加入購物車

購買 Children of a Dead Earth

特別促銷！剩餘時間 34:38:05

-50% ~~NT$ 318~~ NT$ 159 加入購物車